Representación integral de p-métricas y modelos para la complejidad algorítmica

Sandra Oltra Crespo
Depto. Matemática Aplicada, E.P.S.A. Universidad Politécnica de Valencia.
Alcoi, Alicante 03801, España

Salvador Romaguera
Depto. Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia.
Valencia 46022, España

y

Enrique A. Sánchez Pérez
Depto. Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia.
Valencia 46022, España

RESUMEN

La utilización de ciertas estructuras algebraicas dotadas de topologías especiales se ha convertido en los últimos años en una herramienta muy utilizada en la construcción de modelos para el análisis de complejidad de algoritmos y programas, así como en el estudio de la semántica de lenguajes. En este sentido, una de las ideas que se han desarrollado se basa en la definición de topologías mediante métricas parciales y p-métricas. En este trabajo estamos interesados en obtener una teoría de la representación para p-pseudo métricas definidas en espacios vectoriales. En concreto, presentamos la forma de representar estos instrumentos para la definición de topologías utilizando la integración en espacios de funciones.

Nuestra intención es desarrollar mediante esta representación de las p-métricas en espacios de funciones una generalización de la estructura del Espacio de Complejidad Dual que fue introducido por Romaguera y Schellekens, y que originalmente está definido sólo como espacio de sucesiones. Este espacio ha sido utilizado como modelo para estudiar la tendencia asintótica de crecimiento de algoritmos y programas, y puede usarse interpretando sus elementos como indicadores de la complejidad.

Palabras Clave: Representación Integral, Análisis de Complejidad y Métricas Parciales.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han desarrollado diferentes contribuciones, desde el punto de vista de la topología no simétrica, conducentes a la creación de modelos en ciencias de la computación. En principio, estos modelos se han desarrollado en conjuntos sin estructura algebraica. A principios de los años 90, S.G. Matthews introdujo en [3] el concepto de espacio métrico parcial como parte del estudio de semántica de lenguajes y del flujo de datos en red, y obtuvo, entre otros resultados, la relación entre los espacios métricos parciales y los llamados espacios casi-métricos ponderables. Estudios recientes en el área de los espacios casi-métricos dan aplicaciones de estas estructuras no simétricas a los problemas de computación teórica, en el contexto de la semántica de lenguajes [3], y también en la teoría de complejidad y en topología algebraica.

Estos espacios han sido estudiados desde entonces en varios trabajos de investigación tanto en lo que respecta a su estructura como a sus aplicaciones (véase por ejemplo [5] y [4]). En la misma línea, y con el fin de obtener elementos que permitieran profundizar en el análisis de complejidad de algoritmos y programas, Schellekens introdujo el espacio de complejidad, cuya topología podía representarse utilizando las métricas parciales propuestas por Matthews (véase [9]). Posteriormente, Romaguera y Schellekens propusieron el espacio de complejidad dual, que tiene estructura lineal, como contexto óptimo para el análisis de la complejidad (véase [7]). En [1] se ha propuesto la generalización de este espacio para permitir su utilización en el caso de algoritmos con funciones de complejidad que no estén contenidas en el espacio dual de complejidad.

Las representaciones integrales en espacios topológicos de interés en el análisis de complejidad de algoritmos permite extender de manera natural este análisis al caso en el que el conjunto sobre el que se define la medida de complejidad no sea necesariamente numerable; por ejemplo, en el contexto del análisis de complejidad tiene sentido representar magnitudes mediante funciones sobre un conjunto cualquiera, y no necesariamente sobre los enteros no negativos. Esto hace conveniente extender la representación del espacio de complejidad dual mediante métricas parciales al contexto más general de los espacios de funciones, entorno en el que sigue siendo posible utilizar los elementos del análisis de complejidad en los mismos términos que en las aplicaciones del espacio de complejidad dual original.

Siguiendo esta línea de trabajo, en este artículo presentamos condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de representaciones integrables en espacios de funciones particulares. En concreto, nos centramos en espacios de funciones continuas sobre un conjunto compacto Hausdorff, y en los espacios de funciones integrables Lebesgue $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. No obstante, una modificación de la misma técnica utilizada podría conducir a extender estas representaciones a espacios más generales.

2. PRELIMINARES

En este apartado definiremos algunos elementos matemáticos necesarios para el desarrollo del artículo. Las letras R, R^+, N y ω denotarán el conjunto de los números reales, el de los números reales no negativos, el de los números naturales y el de los enteros no negativos, respectivamente.

Recordamos que una casi-pseudo métrica en un conjunto X es una función d definida en $X \times X$ con valores en R^+ tal que para todo x,y,z en X:

(i) $d(x,x)=0$.
(ii) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$.

Un espacio casi-pseudo métrico es un par (X,d) tal que X es un conjunto no vacío y d es una casi-pseudo métrica.

Diremos que d es una casi-métrica si además cumple la siguiente condición:
(iii) si $d(x,y)=d(y,x)=0$, entonces $x=y$.

En este caso, el par (X,d) es un espacio casi-métrico. Diremos que un espacio casi-pseudo métrico (X,d) es ponderable (o que la casi-pseudo métrica d lo es) si existe una función $\omega : X \rightarrow R^+$, que llamaremos función peso, tal que para todo x,y en X se cumple que:

$$d(x,y)+\omega(x)=d(y,x)+\omega(y)$$

Si la función peso está definida como $\omega : X \rightarrow R$, es decir puede tomar también valores negativos, diremos que es una función peso generalizada o función g-peso, y en este caso d es una casi-pseudo métrica g-ponderable.

Definición 1. Una métrica parcial en un conjunto no vacío X es una función $p : X \times X \rightarrow R^+$ tal que para todo $x,y,z \in X$,

(i) $x=y \leftrightarrow p(x,y)=p(x,x)=p(y,y)$.
(ii) $p(x,x) \leq p(x,y)$.
(iii) $p(x,y)=p(y,x)$.
(iv) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(z,z)$.

Un espacio métrico parcial es un par (X,p) tal que X es un conjunto no vacío y p es una métrica parcial en X. El caso más general en el que la función p puede tomar valores negativos lo introdujo O'Neill en [4], en este caso llamaremos a (X,p) espacio p-métrico y diremos que p es una p-métrica.

Diremos que p es una p-pseudo métrica (o pseudo-métrica parcial) si la condición (i) de la definición la sustituimos por la siguiente:

(v) $x=y \rightarrow p(x,x)=p(x,y)=p(y,y)$.

Un espacio p-pseudo métrico (pseudo-métrico parcial) es el par (X,p) tal que X es un conjunto no vacío y p es una p-pseudo métrica (pseudo-métrica parcial) en X.

Recordamos el siguiente resultado, que está demostrado en [3], Teoremas 4.1 y 4.2, en el que Matthews establece unas relaciones entre las casi-métricas ponderables y las métricas parciales. Este resultado se puede extender al caso generalizado, entre p-métricas y casi-métricas g-ponderables (véase [6]).

Teorema 2. a) Sea (X,p) un espacio métrico parcial. Entonces la función $d : X \times X \rightarrow R^+$ definida como $d_p(x,y)= p(x,y) - p(x,x)$ para cada $x,y \in X$ es una casi-métrica ponderable en X con función peso $\omega(x)=p(x,x)$ para cada $x \in X$. Además, $\tau(p)= \tau(d_p)$.
b) Recíprocamente, si (X,d) es un espacio casi-métrico ponderable con función peso ω, entonces la función $p_d : X \times X \rightarrow R^+$, definida como $p_d(x,y)=d(x,y)+\omega(x)$, es una métrica parcial en X. Además, las topologías coinciden, $\tau(p)= \tau(d_p)$.

Recordamos también que el espacio de complejidad dual se define como el espacio casi-métrico (C^*, d_{C^*}), donde

$$C^*=\{ f : \omega \rightarrow R^+ : \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f(n)<\infty\},$$

y d_{C^*} es la casi-métrica definida como la función que a cada par $f,g \in C^*$ le corresponde:

$$d_{C^*}(f,g)= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}[(g(n)-f(n)) \vee 0].$$

Desde el punto de vista computacional, esta casi-métrica se puede interpretar como una herramienta para comparar el progreso relativo que se consigue, con respecto a la complejidad, cuando sustituimos un algoritmo con función de complejidad f por otro de función de complejidad g. Por ejemplo, si la función de complejidad representa el tiempo de computación necesario para realizar una tarea con un cierto algoritmo, si la distancia entre dos de estas funciones es $d_{C^*}(f,g)=0$, $f \neq g$, esto significa en el modelo que el algoritmo que representa g es más eficiente que el que representa f.

La topología inducida por la casi-métrica d_{C^*} se puede definir también mediante una métrica parcial p_{c^*} en C^*, dada por la expresión:

$$p_{c^*}(f,g)= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}[g(n) \vee f(n)],$$

para cada $f,g \in C^*$**.**

Definición 3. Sea (X,+,.) un conjunto algebraicamente cerrado y p una p-pseudo métrica definida en X, diremos que p es subaditiva en X si para cualquier $x,y,a,b \in X$ se cumple que:

$$p(x+a,y+b) \leq p(x,y)+p(a,b).$$

Diremos que p es una p-pseudo métrica aditiva en X si para cualquier x,y en X se cumple que:

$$p(x+a,y+b)=p(x,y)+p(a,b).$$

Diremos que p es una p-pseudo métrica homogénea en X si para cualquier par x,y en X y para cualquier λ en R se cumple que:

$$p(\lambda x,\lambda x)=\lambda p(x,x).$$

Diremos que p es una p-pseudo métrica lineal en X si para cualquier par x,y en X se cumple que:

$$p(x+y,x+y)=p(x,x)+p(y,y).$$

Denotaremos, como es habitual, mediante C(K) el espacio de Banach de las funciones continuas sobre el espacio compacto (de Hausdorff) K. Utilizaremos la notación estándar del análisis funcional (véanse [2] y [8]); así, si X es un espacio de Banach, X^* denotará su espacio dual.

3. P-PSEUDO MÉTRICAS REPRESENTABLES INTEGRALMENTE EN C(K)

En esta sección presentamos los resultados que nos permiten caracterizar el conjunto de las p-pseudo métricas representables integralmente, a partir de ciertas propiedades relacionadas con las operaciones del espacio vectorial y las propiedades de orden en el retículo C(K), en el que consideramos su orden natural.

Definición 4. Sea K un espacio topológico de Hausdorff. Diremos que una p-pseudo métrica p en C(K) es representable integralmente si existe una medida $\mu\in(C^*(K))^+$ tal que:

$$p(f,g)=\int_K (f\vee g)d\mu\ ,$$

para todo par de funciones $f,g\in C(K)$.

Proposición 5. Si existe $\mu\in(C^*(K))^+$ tal que para todo par de funciones f,g en C(K)

$$p(f,g)=\int_K (f\vee g)d\mu\ ,$$

entonces p es una p-pseudo métrica que cumple las siguientes propiedades:

(1) $p(f,g)=p(g,g)$ si y sólo si $f\le g$,
(2) $p(f\vee g,f\vee g)=p(f,g)$,
(3) es subaditiva,
(4) es lineal,
(5) es homogenea.

Nótese que en este caso, se cumple también que

$$p(f,g)=\frac{1}{2}p(f+g,f+g)+\frac{1}{2}p(|f-g|,|f-g|)$$

para todo par de funciones f,g en C(K).

Prueba. Sean f,g en C(K). Veamos que la siguiente función define una p-pseudo métrica,

$$p(f,g)=\int_K (f\vee g)d\mu\ .$$

Es evidente, por la definición, que cumple las tres primeras propiedades de p-pseudo métrica parcial; es decir:

(i) si f=g entonces, $p(f,g)=p(f,f)=p(g,g)$.
(ii) $p(f,f)\le p(f,g)$.
(iii) $p(f,g)=p(g,f)$.

Veamos ahora que es cierta la siguiente versión de la desigualdad triangular para p-pseudo métricas:
(iv) $p(f,g)\le p(f,h)+p(h,g)-p(h,h)$.

Para la demostración será suficiente comprobar que la siguiente desigualdad es cierta :

$$\int_K (f\vee g)d\mu\le\int_K (f\vee h)d\mu+\int_K (h\vee g)d\mu-\int_K h d\mu$$

Para ello vamos a usar la siguiente igualdad, que es bien conocida.

$$f\vee g=\frac{1}{2}(f+g)+\frac{1}{2}|f-g| \qquad (1)$$

Efectivamente,

$$\int_K (f\vee g)d\mu+\int_K h d\mu\le\frac{1}{2}\int_K (f+g)d\mu+\frac{1}{2}\int_K |f-g|d\mu+\int_K h d\mu\le$$
$$\le\frac{1}{2}\int_K (f+g)d\mu+\frac{1}{2}\int_K |f-h+h-g|d\mu+\frac{1}{2}\int_K h d\mu+\frac{1}{2}\int_K h d\mu\le$$
$$\le\frac{1}{2}\int_K (f+h)d\mu+\frac{1}{2}\int_K |f-h|d\mu+\frac{1}{2}\int_K (h+g)d\mu+\frac{1}{2}\int_K |h-g|d\mu=$$
$$=\int_K (f\vee h)d\mu+\int_K (h\vee g)d\mu..$$

Por lo tanto, p define una p-pseudo métrica en C(K).

Veamos ahora que cumple las propiedades del enunciado.

(1) $p(f,g)=p(g,g)$ si y sólo si $f\le g$.

$$p(f,g)=\int_K (f\vee g)d\mu=\int_K g d\mu=p(g,g)$$

(2) $p(f\vee g,f\vee g)=p(f,g)=\frac{1}{2}p(f+g,f+g)+\frac{1}{2}p(|f-g|,|f-g|)$.

Obviamente la primera parte es cierta. Para comprobar la segunda utilizaremos la siguiente relación: para cualquier par f,g en C(K) es cierta la Ec. (1). Entonces:

$$p(f,g)=\int_K (f\vee g)d\mu=\frac{1}{2}\int_K (f+g)d\mu+\frac{1}{2}\int_K |f-g|d\mu=$$
$$=\frac{1}{2}p(f+g,f+g)+\frac{1}{2}p(|f-g|,|f-g|).$$

(3) Es subaditiva, es decir, $p(f+g,h+q)\le p(f,h)+p(g,q)$.

Por la linealidad de la integral, será lo mismo demostrar que p es subaditiva que comprobar que, dadas f,g,h y q en C(K) se cumple la desigualdad siguiente:

$$(f+h)\vee(h+q)\le(f\vee h)+(g\vee q).$$

Como necesitamos probar esta desigualdad puntualmente suponemos en primer lugar que todas las funciones son positivas. En este caso es cierta ya que si evaluamos puntualmente, obtenemos

$$\|(f+g\ ,h+q)\|_\infty\le\|(f,h)\|_\infty+\|(g,q)\|_\infty$$

donde $\|\ .\ \|_\infty$ indica la norma infinito en R^2.
Si por el contrario alguna de las cantidades implicadas es negativa, entonces podríamos sumar un número lo suficientemente grande a ambas partes de la desigualdad para asegurar que todas las cantidades son positivas.

(4) Es lineal.

$$p(f+h,f+h)=\int_K (f+h)\vee(f+h)d\mu=\int_K (f+h)d\mu=$$
$$=\int_K (f\vee f)d\mu+\int_K (h\vee h)d\mu=p(f,f)+p(h,h).$$

(5) Es obviamente homogénea. ■

Proposición 6. Consideremos una p-pseudo métrica p sobre C(K) que cumple las siguientes propiedades:

(1) p es lineal,
(2) p es homogénea,
(3) $p(f\vee g, f\vee g) = p(f,g)$,
(4) La función ϕ, definida como $\phi(f):=p(f,f)$ para toda f en C(K), es continua con respecto de la topología de la norma.

Entonces p es representable integralmente en C(K).

Prueba. En primer lugar definimos sobre C(K) un funcional φ que a cada f en C(K) le hace corresponder $\varphi(f)=p(f,f)$.
La prueba consiste en demostrar que φ verifica las hipótesis del Teorema de Riesz, de esta forma tendremos que existe $\mu \in C^*(K)$ tal que:

$$\varphi(f) = p(f, f)=\int_K f\, d\mu.$$

Para la prueba veamos primero que φ es lineal. Sean f,g en C(K), entonces aprovechando que p es una p-pseudo métrica lineal tenemos que:

$$\varphi(f + g)=p(f+ g,f + g)=p(f,f) + p(g,g)=\varphi(f) + \varphi(g)$$

Además como p es homogénea se tiene que para cualquier λ en R:

$$\varphi(\lambda f)=p(\lambda f,\lambda g) = \lambda p(f, g)= \lambda \varphi(f)$$

Y por hipótesis tenemos que φ es continuo con respecto la topología de la norma. Luego bajo estas hipótesis podemos aplicar el Teorema de Riesz y concluir que existe μ en C*(K) tal que

$$\varphi(f) = p(f, f)=\int_K f\, d\mu .$$

Además por las propiedades que verifica p, se tiene que dados dos elementos cualesquiera f, g en C(K)**,**

$$\varphi(f\vee g) = p(f\vee g, f\vee g) = p(f,g) = \int_K (f \vee g)d\mu .$$

Para acabar la prueba falta demostrar que μ es una medida positiva. Supongamos por reducción al absurdo que μ no es positiva. Entonces, existe una función f no negativa, tal que la integral $\int_K f\, d\mu <0$. Por otra parte, y por ser p una p-pseudo métrica, para cualquier f,g y h en C(K), es cierto que $p(f,g) \leq p(f,h)+p(h,g)-p(h,h)$. Tomamos f=g y $h=\frac{1}{2}f$. Obviamente,

$$\int_K f\, d\mu < \int_K h\, d\mu.$$

Veamos que esto nos lleva a una contradicción. En efecto,

$$\int_K (f \vee g)d\mu +\int_K h\, d\mu = \int_K g\, d\mu + \int_K h\, d\mu > \int_K g\, d\mu + \int_K f\, d\mu .$$

Por tanto $p(f,g) + p(h,h) > p(f,h) + p(h,g)$, lo que contradice la definición de p-pseudo métrica. De modo que necesariamente la medida ha de ser positiva, μ en $(C^*(K))^+$, y con esto demostramos que p es una p-pseudo métrica representable integralmente en C(K). ■

Nota 7. Nótese que de forma análoga podemos definir las pseudo-métricas parciales representables integralmente, así como enunciar y demostrar los resultados anteriores para el caso (particular) en que p sea una pseudo-métrica parcial, para subconjuntos particulares de C(K).

Los resultados anteriores permiten reconstruir la topología de cualquier espacio de funciones continuas en un compacto a partir de las p-pseudo métricas representables integralmente, considerando la casi-métrica supremo sobre todas estas p-pseudo métricas.
Sea p_μ una casi-pseudo métrica representable integralmente, primero definimos la casi-pseudo métrica ponderada asociada a partir de la relación que estableció Matthews,

$$d_\mu(f , g)=p_\mu(f ,g)-p_\mu(f ,f).$$

Ahora para construir la casi-pseudo métrica que llamaremos la casi-pseudo métrica asociada a la topología del orden.

$$d_o(f ,g)=\sup_{\mu \varepsilon M} d_\mu(f ,g),$$

donde $M=(B_{C^*(K)})^+$, la parte positiva de la bola unidad del espacio de las medidas regulares de Borel sobre K.

Es fácil comprobar que

$$d_o(f ,g)=\|(g - f)\vee 0 \|$$

para todo par de funciones f y g y que d_0 es una casi-métrica, de forma que la métrica supremo asociada nos da exactamente la topología de la norma.

4 . EL ESPACIO DE COMPLEJIDAD DUAL

El contexto matemático en el que aparece el espacio de complejidad dual es el de los subconjuntos algebraicamente cerrados (conjuntos donde la suma de dos elementos y el producto por escalares positivos pertenece al conjunto) de espacios vectoriales con una topología que no puede representarse utilizando los elementos habituales de los espacios vectoriales topológicos. En concreto, el espacio de complejidad dual se puede identificar con el cono positivo de un espacio vectorial de norma asimétrica. Es por ello que la primera extensión que aparece de manera natural es al caso del cono positivo de las funciones continuas sobre un conjunto compacto. Nótese que la fórmula que define la métrica parcial $p_{X^{**}}$ se puede representar como la integral en el conjunto ω del máximo de las funciones implicadas respecto de la medida $\left(2^{-n}\right)_{n=0}^{\infty}$. Lo que pretendemos es generalizar la estructura del Espacio de Complejidad Dual que introdujeron Romaguera y Schellekens en [7] que está definido sólo para sucesiones, el caso de espacios de funciones.

Por ejemplo, consideremos un conjunto K compacto y Hausdorff, y una medida regular y de Borel μ sobre K. Como consecuencia de la Proposición 5, la siguiente función, definida para cada par de funciones continuas f,g sobre K, como:

$$p_\mu(f ,g)= \int_K (f\vee g)\, d\mu$$

define una p-pseudo métrica en C(K).

Podemos definir entonces el espacio dual asociado a μ mediante el par formado por el cono positivo de C(K) y la función p_μ . Es fácil ver que la construcción de la estructura topológica de este espacio es similar a la del Espacio de Complejidad Dual original.

5 . P-PSEUDO MÉTRICAS REPRESENTABLES INTEGRALMENTE EN ESPACIOS L_P

Definición 8. Sea μ una medida sobre un cierto espacio de medida. Sean $1\leq p<\infty$ y p' tales que $1/p+1/p'=1$. Diremos que una p-pseudo métrica en $L_p(\mu)$ es representable integralmente en $L_p(\mu)$ si existe una función $h\in (L_{p'}(\mu))^+$, es decir, que pertenezca al cono positivo de $L_{p'}(\mu)$ tal que para todo par de funciones f,g que pertenecen a $L_p(\mu)$ se cumple que:

$$p(f,g) = \int (f \vee g)\, h\, d\mu .$$

Proposición 9. Dados $L_p(\mu)$ y $L_{p'}(\mu)$. Si existe $h \in (L_{p'}(\mu))^+$ tal que para todo par de funciones $f,g \in L_p(\mu)$, se cumple que:

$$p(f,g) = \int (f \vee g)\, h\, d\mu.$$

Entonces p es una p-pseudo métrica que cumple las siguientes propiedades:
(1) $p(f,g)=p(g,g)$ si y sólo si $f \leq g$,
(2) $p(f\vee g,f\vee g)=p(f,g)$
(3) es subaditiva,
(4) es lineal,
(5) es homogenea.

En este caso, además se cumplirá

$$p(f,g)=\frac{1}{2}\, p(f+g,f+g)+ \frac{1}{2}\, p(|f-g|,|f-g|),$$

para cualquier f,g en $L_p(\mu)$.

Prueba. La demostración sigue las mismas pautas que la de la Proposición 5. Sean $f,g \in L_p(\mu)$ y $h \in (L_{p'}(\mu))^+$, veamos que la siguiente función define una p-pseudo métrica en $L_p(\mu)$,

$$p(f,g) = \int (f \vee g)\, h\, d\mu$$

Veamos que verifica todas las condiciones que definen una p-pseudo métrica.
(i) Si f=g entonces, $p(f,g)=p(f,f)=p(g,g)$.
(ii) $p(f,f) \leq p(f,g)$.
(iii) $p(f,g)=p(g,f)$.
Es evidente, por la definición de p, que estas tres son ciertas.
(iv) $p(f,g) \leq p(f,h) + p(h,g) - p(h,h)$.
Para la demostración será suficiente comprobar que la siguiente desigualdad es cierta, siendo f,g, l elementos de $L_p(\mu)$:

$$\int_K (f \vee g)h\, d\mu \leq \int_K (f \vee l)h\, d\mu + \int_K (l \vee g)h\, d\mu - \int_K lh\, d\mu.$$

Aprovechando la Ec. (1), que también es cierta en el caso de funciones integrables, podemos escribir la desigualdad anterior como:

$$\int_K (f \vee g)h\, d\mu + \int_K lh\, d\mu \leq \frac{1}{2}\int_K (f+g)h\, d\mu + \frac{1}{2}\int_K |f-g|h\, d\mu +$$
$$+ \int_K lh\, d\mu \leq \frac{1}{2}\int_K (f+g)h\, d\mu + \frac{1}{2}\int_K |f-l+l-g|h\, d\mu +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_K lh\, d\mu + \frac{1}{2}\int_K lh\, d\mu \leq \frac{1}{2}\int_K (f+l)h\, d\mu +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_K |f-l|h\, d\mu + \frac{1}{2}\int_K (l+g)h\, d\mu + \frac{1}{2}\int_K |l-g|h\, d\mu =$$
$$= \int_K (f \vee l)h\, d\mu + \int_K (l \vee g)h\, d\mu.$$

Hemos demostrado entonces que p es una p-pseudo métrica en $L_p(\mu)$.

Veamos ahora que cumple las propiedades del enunciado.

(1) $p(f,g)=p(g,g)$ si y solamente si $f \leq g$. Obviamente esta propiedad es cierta.

(2) $p(f\vee g,f\vee g)=p(f,g)=\frac{1}{2}\, p(f+g,f+g)+\frac{1}{2}\, p(|f-g|,|f-g|)$.

La primera parte de la igualdad es cierta. Para comprobar la segunda utilizaremos de nuevo la Ec. (1). Entonces:

$$p(f,g) = \int_K (f \vee g)h\, d\mu = \frac{1}{2}\int_K (f+g)h\, d\mu + \frac{1}{2}\int_K |f-g|h\, d\mu =$$
$$= \frac{1}{2}\, p(f+g,f+g) + \frac{1}{2}\, p(|f-g|,|f-g|).$$

(3) Es subaditiva, es decir, $p(f+g,l+q) \leq p(f,l) + p(g,q)$.

Por la linealidad de la integral será lo mismo demostrar que dadas f,g,l,q en $L_p(\mu)$ se cumple la desigualdad siguiente:

$$(f+g)\vee (l+q) \leq (f\vee l) + (g\vee q).$$

Como necesitamos probar esta desigualdad puntualmente suponemos en primer lugar que todas las funciones son positivas. En este caso es cierta ya que para cada evaluación puntual

$$\| (f+g, l+q) \|_\infty \leq \| (f,l) \|_\infty + \| (g,q) \|_\infty$$

Si por el contrario alguna de las cantidades implicadas es negativa, entonces podríamos sumar un número lo suficientemente grande a ambas partes de la desigualdad para asegurar que todas las cantidades son positivas y procederíamos del mismo modo.

(4) Es lineal.

$$p(f+l,f+l)= \int_K ((f+l)\vee (f+l))h\, d\mu = \int_K (f+l)h\, d\mu =$$
$$= \int_K (f \vee f)h\, d\mu + \int_K (l\vee l)h\, d\mu = p(f,f) + p(l,l).$$

(5) Es homogenea. ■

Proposición 10. Sea $1\leq p<\infty$. Consideremos una p-pseudo métrica p sobre $L_p(\mu)$ que cumple las siguientes propiedades:
(1) p es lineal,
(2) p es homogénea,
(3) $p(f\vee g,f\vee g) = p(f,g)$,
(4)La función ϕ, definida para toda f en $L_p(\mu)$ como $\phi(f):=p(f,f)$, es continua con respecto de la topología de la norma.

Entonces p es representable integralmente en $L_p(\mu)$.

Prueba. En primer lugar definimos sobre $L_p(\mu)$ un funcional φ que a cada f en $L_p(\mu)$ le hace corresponder $\varphi(f)=p(f,f)$.
La prueba consiste en demostrar que φ verifica las hipótesis del Teorema de Dualidad, así tendremos que existe h en $L_{p'}(\mu)$, tal que:

$$\varphi(f)=p(f,f)= \int fh\, d\mu$$

Veamos primero que φ es lineal. Sean f,g en $L_p(\mu)$, entonces como p es una p-pseudo métrica lineal tenemos que:

$$\varphi(f+g)=p(f+g,f+g)=p(f,f)+p(g,g)=\varphi(f)+\varphi(g)$$

Además como p es homogénea se tiene que para cualquier λ en R,

$$\varphi(\lambda f)=\lambda\,\varphi(f)$$

Y por hipótesis tenemos que p es continua con respecto la topología de la norma. Luego bajo estas hipótesis podemos aplicar el Teorema de Dualidad y concluir que existe h en $L_{p'}(\mu)$ tal que para cualquier f en $L_p(\mu)$:

$$\varphi(f)=p(f,f)=\int fh\,d\mu$$

Además por las propiedades, se tiene que dados dos elementos cualesquiera f,g en $L_p(\mu)$ existe h en $L_{p'}(\mu)$ tal que:

$$\varphi(f\vee g)=p(f\vee g, f\vee g)=p(f,g)=\int(f\vee g)h\,d\mu\,.$$

Para finalizar la prueba hay que demostrar que h pertenece al cono positivo de $L_p(\mu)$. Para ello suponemos por reducción al absurdo que h no pertenece a $L_{p'}(\mu)$, entonces h admite (véase [1], por ejemplo) una representación de la forma $h=h^+-h^-$, μ-casi por todas partes, con h^+,h^- en $(L_{p'}(\mu))^+$.

Consideramos ahora los conjuntos A y B definidos como los soportes esenciales de cada una de las funciones, es decir,

$A=\mathrm{supess}(h^+)$ y $B=\mathrm{supess}(h^-)$ μ-casi por toda partes.

En la prueba nos vamos a restringir, sin pérdida de generalidad, al subconjunto B tal que $h|_B=-h^-$ μ- casi por todas partes.
Por otra parte, y por ser p una p-pseudo métrica para cualquier $f,g,l\in L_p(\mu)$ es cierto que:

$$p(f,g)+p(l,l)\le p(f,l)+p(l,g)$$

Consideremos ahora una función f definida como 1 en B, si este conjunto tiene medida finita (en otro caso tomamos un subconjunto de B que la tenga), y que fuera del conjunto sea 0. Tomamos f=g y $l=\frac{1}{2}f$. Todas ellas pertenecen a $L_p(\mu)$.
Suponemos que el conjunto B tiene medida no nula (de no ser así $\mu(B)=0$ y entonces directamente $h\in(L_{p'}(\mu))^+$). Sea pues, $\mu(B)\neq 0$; como f >l y h es una función negativa en B se tiene que:

$$\int_B fh\,d\mu<\int_B lh\,d\mu.$$

Veamos que esto nos lleva a una contradicción. En efecto,

$$\int(f\vee g)h\,d\mu+\int lh\,d\mu=\int gh\,d\mu+\int lh\,d\mu>$$

$$>\int(f\vee g)h\,d\mu+\int fh\,d\mu.$$

Por lo que $p(f,g)+p(l,l)>p(f,l)+p(l,g)$, lo que contradice la definición de p-pseudo métrica. De modo que necesariamente la función h debe estar en $(L_{p'}(\mu))^+$, y con esto demostramos que p es una p-pseudo métrica representable integralmente. ■

Nota 11. Nótese que de forma análoga, tal y como hemos dicho en el espacio de las funciones continuas en un espacio compacto de Hausdorff, podemos definir las pseudo-métricas representables integralmente, así como enunciar y demostrar los resultados anteriores para el caso en que p sea una pseudo-métrica parcial, en subconjuntos particulares de funciones no negativas de $L_p(\mu)$.

Agradecimiento: Este trabajo ha sido financiado por la Generalitat Valenciana, Ayuda: GRUPOS03/027.

6 . BIBLIOGRAFÍA

[1] L. M. García-Raffi, S. Romaguera and E. A. Sánchez-Pérez, Sequence spaces and asymmetric norms in the theory of computational complexity. **Math. Comp. Model.,** 36 (2002), 1-11.
[2] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, **Classical Banach Spaces I and II**. Springer. Berlin. 1996.
[3] S.G. Matthews, Partial metric topology, in: Proc. 8tth Summer Conference on General Topology and Applications. **Ann. New York Acad. Sci** 728 (1994), 183-197.
[4] S.J. O'Neill, Partial metrics, valuations and domain theory, in: Proc. 11th Summer Conference on General Topology and Applications. **Ann. New York Acad. Sci**. 806 (1996), 304-315.
[5] S. Oltra, S. Romaguera and E.A. Sánchez-Pérez, Bicompleting weightable quasi-metric spaces and partial metric spaces, **Rend. Circolo Mat. Palermo,** 51 (2002), 151-162.
[6] S. Oltra, **Métricas Parciales, Semigrupos y Espacios Vectoriales Topológicos.** Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2004.
[7] S. Romaguera and M. Schellekens, Quasi-metric properties of complexity spaces. **Topology Appl.** 98 (1999), 311-322.
[8] W. Rudin, **Functional Analysis**. McGraw-Hill. New York. 1973.
[9] M. Schellekens, The Smyth completion: a common foundation for denotational semantics and complex analysis, in: Proc. 11th MFPS 11, **Electronic Notes in Theoretical Computer Science** 1 (1995), 211-232.