Casi-métricas Difusas y Dominios de Computación

Jesús RODRÍGUEZ-LÓPEZ *
Escuela Politécnica Superior de Alcoy, Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia, 03801 Alcoy (Alicante), España

Salvador ROMAGUERA *
Escuela de Caminos, Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia, 46071 Valencia, España.

Almanzor SAPENA *
Escuela Politécnica Superior de Gandía, Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia, 46730 Gandía (Valencia), España.

RESUMEN

En este trabajo aplicamos el concepto de casi-métrica difusa para construir un modelo computacional en el análisis de algunos dominios de computación fundamentales, como el dominio de las palabras dotado con las casi-métricas de Baire, del orden del prefijo y del prefijo, respectivamente.

Palabras Claves: casi-métricas, dominios de computación, dominio de las palabras, casi-métrica de Baire, prefijo.

1. INTRODUCCIÓN Y PRELIMINARES

Recientemente, Gregori y Romaguera ([7]) han extendido al caso casi-métrico la noción de métrica difusa ("fuzzy metric") introducida por George y Veeramani ([3], [4]), y que a su vez constituye una interesante modificación de la correspondiente noción de métrica difusa de Kramosil y Michalek ([11]). Diversas propiedades de este tipo de métricas difusas han sido investigadas en los últimos años por varios autores ([5], [6], [8], [13], etc.).

Recordemos algunos conceptos y propiedades básicas que utilizaremos en este trabajo.

Una casi-métrica en un conjunto no vacío X es una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ tal que para todo $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un espacio casi-métrico es un par (X, d) tal que X es un conjunto no vacío y d es una casi-métrica en X.

Si d es una casi-métrica en X, entonces la función d^{-1} definida en $X \times X$ por $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$, también es una casi-métrica en X, llamada conjugada de d. Además, la función d^s definida en $X \times X$ por $d^s(x, y) = \max\{d(x, y), d^{-1}(x, y)\}$ es una métrica en X.

Es sabido (ver, por ejemplo, [2]), que toda casi-métrica d en X genera una topología τ_d en X que tiene como una base de abiertos la familia de bolas abiertas $\{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$, donde, como es usual, $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ para todo $x \in X, \varepsilon > 0$.

Toda casi-métrica d en X induce, de modo natural, un (pre)orden $\leq_d$ en X (orden de especialización), definido por

$$x \leq_d y \Leftrightarrow d(x, y) = 0. \tag{1}$$

Nuestra referencia bibliográfica principal sobre casi-métricas y estructuras relacionadas es [2].

Una operación binaria $* : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ se llama una t-norma continua ([14]), si $*$ verifica las condiciones siguientes: (i) $*$ es asociativa y conmutativa; (ii) $*$ es continua; (iii) $a * 1 = a$ para todo $a \in [0, 1]$; (iv) $a * b \leq c * d$, cuando $a \leq c$ y $b \leq d$, con $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Un espacio casi-métrico difuso ([7]) es un triplete ordenado $(X, M, *)$ tal que X es un conjunto no vacío, $*$ es una t-norma continua y M es un conjunto difuso de $X \times X \times (0, +\infty)$ que verifica las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in X$, $s, t > 0$:

(i) $M(x, y, t) > 0$;

(ii) $M(x, y, t) = M(y, x, t) = 1$ si y sólo si $x = y$;

(iii) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$;

(iv) $M(x, y, \_) : (0, +\infty) \to (0, 1]$ es continua.

Si $(X, M, *)$ es un espacio casi-métrico difuso, decimos que $(M, *)$ es una casi-métrica difusa en X.

Si además, $(M, *)$ verifica para todo $x, y \in X, t > 0$:

(v) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

entonces decimos que $(M, *)$ es una métrica difusa y que $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso ([3]).

Si $(M, *)$ es una casi-métrica difusa en X, entonces el par $(M^{-1}, *)$ es una casi-métrica difusa en X, llamada conjugada de $(M, *)$, donde M^{-1} es el conjunto difuso de $X \times X \times (0, +\infty)$ definido por $M^{-1}(x, y, t) = M(y, x, t)$ para todo $x, y \in X, t > 0$. Además, el par $(M^i, *)$ es una métrica difusa en X donde definimos $M^i(x, y, t) = \min\{M(x, y, t), M^{-1}(x, y, t)\}$ para todo $x, y \in X, t > 0$.

Toda casi-métrica difusa $(M, *)$ en X genera una topología τ_M en X que tiene como una base de abiertos la familia de bolas abiertas $\{B_M(x, \varepsilon, t) : x \in X, 0 < \varepsilon < 1, t > 0\}$, donde $B_M(x, \varepsilon, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - \varepsilon\}$ para todo $x \in X, 0 < \varepsilon < 1, t > 0$.

De forma análoga al caso casi-métrico, toda casi-métrica difusa $(M, *)$ en X induce de modo natural un orden $\leq_M$ en X definido por

*Investigación financiada por la Generalitat Valenciana, mediante la ayuda GRUPOS03/027.

$$x \leq_M y \Leftrightarrow M(x,y,t) = 1, \quad \forall t > 0. \qquad (2)$$

Observemos que si (X, d) es un espacio casi-métrico, definimos $a * b = ab$ para todo $a, b \in [0, 1]$, y denotamos por M_d a la función definida en $X \times X \times (0, +\infty)$ por

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}, \qquad (3)$$

entonces, $(X, M_d, *)$ es un espacio casi-métrico difuso ([7]). En este caso, decimos que $(M_d, *)$ es la casi-métrica difusa inducida por d. Además, es fácil comprobar que $M_{d^{-1}}(x,y,t) = (M_d)^{-1}(x,y,t)$, y $M_{d^s}(x,y,t) = (M^i)_d(x,y,t)$ para todo $x, y \in X, t > 0$.

Recíprocamente, si $(M, *)$ es una casi-métrica difusa en un conjunto X, entonces la colección numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base para una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X, donde $U_n = \{(x,y) : M(x,y,1/n) > 1 - 1/n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de tal modo que la topología τ_M generada por $(M, *)$ coincide con la topología generada por $\mathcal{U}$ y, por tanto, (X, τ_M) es un espacio topológico casi-metrizable ([7]).

Es sabido ([11]) que si $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso, entonces el valor de $M(x,y,t)$ se puede interpretar como la probabilidad de que la distancia de x a y sea menor que t. Esta interpretación se mantiene cuando $(X, M, *)$ es un espacio casi-métrico difuso y, así, la igualdad $M(x,y,t) = 1$ adquiere especial relevancia en un contexto computacional. En efecto, si, por ejemplo, tenemos una cadena creciente de información, denotada por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, la desigualdad $x_n \leq x_{n+1}$ se interpreta como que toda la información contenida en x_n también está contenida en x_{n+1}. Este proceso admite una sencilla modelación inicial mediante una casi-métrica d tal que $d(x_n, x_k) = 0$ si $n \leq k$, y $d(x_n, x_k) = 1/k$ si $n > k$. Así, la probabilidad de que $d(x_n, x_k) < t$, con $n \leq k$, es obviamente 1, es decir, para cualquier casi-métrica difusa $(M, *)$ tal que τ_M sea la topología generada por d, se tendrá $M(x_n, x_k, t) = 1$.

Aplicando estas ideas, modelaremos en la sección siguiente algunos dominios de computación mediante casi-métricas difusas adecuadas que permitan una interpretación satisfactoria de los procesos computacionales inherentes.

2. CASI-MÉTRICAS DIFUSAS EN EL DOMINIO DE LAS PALABRAS

Sea Σ un alfabeto no vacío y sean Σ^F y Σ^∞ los conjuntos de las palabras finitas y de las palabras finitas e infinitas sobre Σ, respectivamente. Adoptamos el convenio de que la palabra vacía ϕ es un elemento de Σ^F. Denotemos por $\sqsubseteq$ el (pre)orden del prefijo en Σ^∞, es decir,

$$x \sqsubseteq y \Longleftrightarrow x \textbf{ es prefijo de } y. \qquad (4)$$

Entonces $(\Sigma^\infty, \sqsubseteq)$ es un dominio de Scott si Σ es numerable. Este espacio aparece de modo natural al modelar flujos de información en el modelo de Kahn de computación en paralelo ([9]).

Para cada $x \in \Sigma^\infty$ denotemos por $\ell(x)$ a la longitud de la palabra x. Así, $\ell(x) \in [1, \omega]$ cuando $x \neq \phi$, y $\ell(\phi) = 0$. Si para cada $x, y \in \Sigma^\infty$ definimos $x \sqcap y$ como el prefijo de mayor longitud común a x e y, entonces

$$\ell(x \sqcap y) = \sup\{n \in \mathbb{N} : x(k) = y(k) \text{ si } k \leq n\},$$

cuando x e y tienen un prefijo común distinto de ϕ, y $\ell(x \sqcap y) = 0$ en otro caso.

Es sabido que la célebre métrica de Baire D_B en Σ^∞ se puede obtener como el supremo de la llamada casi-métrica de Baire d_B y su conjugada, donde

$$d_B(x,y) = 2^{-\ell(x \sqcap y)} - 2^{-\ell(x)}, \qquad (5)$$

para todo $x, y \in \Sigma^\infty$.

También puede obtenerse como el supremo de la casi-métrica del orden del prefijo $d_\sqsubseteq$ y su conjugada, donde

$$d_\sqsubseteq(x,y) = 0 \textbf{ si } x \textbf{ es prefijo de } y,$$

$$d_\sqsubseteq(x,y) = 2^{-\ell(x \sqcap y)} \textbf{ en otro caso.} \qquad (6)$$

Es sabido, y fácil de comprobar (ver, por ejemplo, [10]), que la casi-métrica de Baire y la casi-métrica del orden del prefijo generan la misma topología en Σ^∞, que denotaremos en lo sucesivo por τ_B, y que ambas casi-métricas son crecientes respecto del orden $\sqsubseteq$, pues se tiene obviamente,

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \leq_{d_B} y \Leftrightarrow x \leq_{d_\sqsubseteq} y.$$

Por tanto, si $(M, *)$ es una casi-métrica difusa en Σ^∞ tal que la topología τ_M coincide con τ_B, entonces $M(x,y,t) = 1$ siempre que x es un prefijo de y, con lo que se respeta la interpretación computacional inherente, pues, la probabilidad de que $d_B(x,y) < t$ cuando $x \sqsubseteq y$, es obviamente 1. Por tanto, $(M, *)$ es creciente respecto del orden $\sqsubseteq$. En particular, las casi-métricas difusas $(M_{d_B}, \cdot)$ y $(M_{d_\sqsubseteq}, \cdot)$ inducidas por las casi-métricas de Baire y del orden del prefijo, respectivamente, son crecientes, es decir:

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \leq_{M_{d_B}} y \Leftrightarrow x \leq_{M_{d_\sqsubseteq}} y.$$

Por otra parte, como para todo $x, y \in \Sigma^\infty$, $t > 0$, se verifica:

$$M_{d_B}(x,y,t) = \frac{t}{t + 2^{-\ell(x \sqcap y)} - 2^{-\ell(x)}},$$

y para todo $x, y \in \Sigma^\infty$ tal que x no es prefijo de y, y $t > 0$, se verifica:

$$M_{d_\sqsubseteq}(x,y,t) = \frac{t}{t + 2^{-\ell(x \sqcap y)}},$$

deducimos que si x es una palabra infinita, entonces para todo $y \in \Sigma^\infty$, $t > 0$,

$$M_{d_B}(x,y,t) = M_{d_\sqsubseteq}(x,y,t).$$

Luego, si en particular, x, y son palabras infinitas tenemos:

$$M_{d_B}(x,y,t) = M_{d_B}(y,x,t) = \frac{t}{t + 2^{-\ell(x \sqcap y)}},$$

para todo $t > 0$, con lo que $(M_{d_B}, \cdot)$ coincide con la métrica difusa inducida por la métrica de Baire en el subconjunto de Σ^∞ de las palabras infinitas.

Con todo lo anterior, hemos demostrado el resultado siguiente:

Teorema 1. *Sea Σ un alfabeto no vacío y sean d_B y $d_\sqsubseteq$ las casi-métricas de Baire y del orden del prefijo, respectivamente, en el conjunto Σ^∞ de las palabras finitas e infinitas sobre*

Σ. *Entonces, las casi-métricas difusas* $(M_{d_B}, \cdot)$ *y* $(M_{d_\sqsubseteq}, \cdot)$ *inducidas por* d_B *y* $d_\sqsubseteq$ *respectivamente, son crecientes respecto del orden del prefijo* $\sqsubseteq$*, e inducen la misma topología en* Σ^∞*. Además* $M_{d_B} \geq M_{d_\sqsubseteq}$ *en* $\Sigma^\infty \times \Sigma^\infty \times (0, +\infty)$*, y* $(M_{d_B}, \cdot)$ *es una métrica difusa en el subconjunto de* Σ^∞ *de las palabras infinitas, que coincide con la métrica difusa inducida por la métrica de Baire.*

En el resto del trabajo analizaremos la casi-métrica difusa inducida por la casi-métrica del prefijo d_p. Recordemos (ver [12]) que d_p es la casi-métrica en el conjunto Σ^F de las palabras finitas definida por

$$d_p(x, y) = \ell(y) - \ell(x \sqcap y), \tag{7}$$

para todo $x, y \in \Sigma^F$.

La conocida métrica del prefijo D_p (ver [1]), se puede obtener, entonces, como la suma de d_p y su conjugada, por tanto:

$$D_p(x, y) = \ell(x) + \ell(y) - 2\ell(x \sqcap y),$$

para todo $x, y \in \Sigma^F$.

Si $x, y \in \Sigma^F$, tenemos que

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow d_p(y, x) = 0,$$

y así, la casi-métrica d_p es decreciente respecto del orden del prefijo $\sqsubseteq$. Luego la casi-métrica difusa inducida por d_p también es decreciente respecto del orden del prefijo.

También es interesante observar que si $x \sqsubseteq y$, entonces $d_p(x, y) = \ell(y) - \ell(x)$, y, por tanto, $D_p(x, y) = d_p(x, y)$ en este caso.

Por último, la relación entre la métrica difusa inducida por la métrica del prefijo D_p y la métrica difusa $((M_{d_p})^i, \cdot)$ está clara si tenemos en cuenta que $d_p + (d_p)^{-1} \geq d_p \vee (d_p)^{-1}$.

Con todo lo anterior, hemos demostrado el resultado siguiente:

Teorema 2. *Sea* Σ *un alfabeto no vacío y sea* d_p *la casi-métrica del prefijo en el conjunto* Σ^F *de las palabras finitas sobre* Σ*. Entonces, la casi-métrica difusa* $(M_{d_p}, \cdot)$ *inducida por* d_p *es decreciente respecto del orden del prefijo* $\sqsubseteq$ *. Además* $M_{D_p} \leq (M_{d_p})^i$ *en* $\Sigma^F \times \Sigma^F \times (0, +\infty)$*, y si* x *es un prefijo de* y*, entonces* $M_{D_p}(x, y, t) = M_{d_p}(x, y, t) = (M_{d_p})^i(x, y, t)$ *para todo* $t > 0$.

3. REFERENCIAS

[1] C. Choffrut, G. Pighizzini, "Distances between languages and reflexivity of relations", **Theoret. Comput. Sci.**, Vol. 286, 2002, pp. 117-138.

[2] P. Fletcher, W.F. Lindgren, **Quasi-Uniform Spaces,** Marcel Dekker, New York, 1982.

[3] A. George, P. Veeramani, "On some results in fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems** Vol. 64, 1994, pp. 395-399.

[4] A.George, P. Veeramani, "On some results of analysis for fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol. 90, 1997, pp. 365-368.

[5] V. Gregori, S. Romaguera, "Some properties of fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol. 115, 2000, pp. 485-489.

[6] V. Gregori, S. Romaguera, "On completion of fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol. 130, 2002, pp. 399-404.

[7] V. Gregori, S. Romaguera, "Fuzzy quasi-metric spaces", **Appl. Gen. Topology**, Vol. 5, 2004, pp. 129-136.

[8] V. Gregori, S. Romaguera, A. Sapena, "Uniform continuity in fuzzy metric spaces", **Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste**, Vol. 32, Suppl. 2, 2001, pp. 81-88.

[9] G. Kahn, "The Semantics of a simple language for parallel processing", **Proc. IFIP Congress, Elsevier North-Holland**, 1974, pp. 471-475

[10] H.P.A. Künzi, "Nonsymmetric topology", **Bolyai Soc. Math. Stud.**, Vol. 4, Topology, Szekszárd, 1993, Hungary (Budapest 1995), pp. 303-338.

[11] I. Kramosil, J. Michalek, "Fuzzy metric and statistical metric spaces", **Kybernetika** Vol. 11, 1975, pp. 326-334.

[12] S. Oltra, S. Romaguera, E.A. Sánchez-Pérez, O. Valero, "Distancias subinvariantes algebraicamente y dominios de computación", **Memorias 2da. Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática CISCI** 2003, Orlando, Florida, USA, Agosto 2003, Vol. I, Sistemas, Comunicación e Informática, Tecnologías y Aplicaciones, pp. 24-27.

[13] J. Rodríguez-López, S. Romaguera, "The Hausdorff fuzzy metric on compact sets", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol. 147, 2004, pp. 273-283.

[14] B. Schweizer, A. Sklar, "Statistical metric spaces", **Pacific J. Math.** Vol. 10, 1960, pp. 314-334.