Horizonte de Pronóstico en Sistemas de Inventarios Controlados: una Revisión Panorámica

Heliodoro D. Cruz-Suárez
División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
Apdo. Postal 5, Cunduacán, Tabasco 86690, México.
e-mail: daniel.cruz@basicas.ujat.mx

RESUMEN

En este artículo, se presenta una revisión del concepto de Horizonte de Pronóstico (HP), en Sistemas de Inventarios Controlados. Se revisan los resultados que garantizan la existencia de un entero, conocido como HP, para el cual todos los problemas de control óptimo (descontados), con horizonte finito y mayor que el HP, dejan fijo el control óptimo que corresponde al primer periodo de tiempo. El HP, se ha aplicado principalmente en los Sistemas de Inventarios Controlados. En las aplicaciones, conocer el HP, permite planear en el primer periodo, sin tener que recurrir a la información completa de horizonte infinito.

Palabras Claves: Procesos de Control de Markov Descontados, Horizonte de Pronóstico, Horizonte de Planeación, Ecuación de Programación Dinámica, Iteración de Valores, Control de Inventarios.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo trata con Procesos de Control de Markov, también llamados Procesos de Decisión de Markov (PDMs) (ver [1] y [6]), a tiempo discreto de horizonte finito e infinito. Los PDMs, dependen de una sucesión de decisiones (llamada Política) aplicadas en cada tiempo. Para evaluar la calidad de las políticas se cuenta con un Criterio de Rendimiento, definido en términos de un costo por etapa, aquí el Criterio que se considerará es el costo descontado total (esperado en el caso estocástico). Entonces el Problema Básico de los PDMs (llamado Problema de Control Óptimo), consiste en optimizar el criterio de rendimiento sobre el conjunto de las políticas. A la política que optimiza el criterio de rendimiento se le llama política óptima.

El propósito de este trabajo es hacer una revisión del concepto de HP en PDMs. El HP se define como un entero positivo con ciertas características especiales y está relacionado con la teoría de los PDMs a tiempo discreto, de horizonte finito e infinito.

Cuando existe el HP, el horizonte infinito queda dividido en dos partes (los tiempos menores que el HP y los tiempos mayores o iguales que el HP). Para un tiempo n fijo, mayor que el HP, queda determinado un problema con horizonte n el cual tiene una política f_n asociada a él que puede ser empleada como política óptima para el problema con horizonte infinito. Además, la "información" en el tiempo n, no afecta las primeras decisiones óptimas.

En las aplicaciones el HP ha sido interpretado como un horizonte de planeación y se ha trabajado en áreas como: control de inventarios, planeación de la producción, el reemplazo de equipo, etc. (ver [2], [3], [4], [5], [7], [8], [9], [10], [11] y [12]).

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2 se proporciona la teoría de PDMs con costo total descontado, necesario para definir el HP. La Sección 3 aborda los resultados de HP en un contexto de Modelos Deterministas. En la Sección 4 se presenta la existencia del HP en un Modelo Estocástico. Finalmente se dan las conclusiones y las referencias.

2. MODELOS DE CONTROL

Empezaremos describiendo el caso particular de los PDMs, estacionarios con costo total descontado (ver [6]).

Dado un espacio de Borel X, i.e., un subconjunto de Borel de un espacio métrico separable y completo, denotamos su σ-álgebra por $\boldsymbol{B}(X)$.

Sean X y Y dos espacios de Borel. Un kérnel estocástico $Q(dx/y)$ sobre X dado Y es una función tal que $Q(\cdot/y)$ es un medida de probabilidad sobre X para cada $y \in Y$ fijo y $Q(B/\cdot)$ es una función medible sobre Y para cada $B \in \boldsymbol{B}(X)$ fijo.

Modelos de Control de Markov.
Un modelo de Control de Markov a tiempo discreto, estacionario es una quíntupla $(X, A, \{A(x): x\in X\}, Q, c)$, que consiste del espacio de estados X, el conjunto de controles A, los controles admisibles $A(x) \subset A$ cuando el sistema se encuentra en el estado x, la ley de transición Q y la función de costo de una etapa c.

Suponemos que X y A son espacios de Borel contenidos en IR. También suponemos que $A(x)$ es medible, $x \in X$, Q es un kérnel estocástico sobre X dado $(x,a) \in X \times A$ y c es una función medible real valuada. Además, para cada $t = 0, 1, \ldots$:

$$Q(B|x,a) = P(x_{t+1} \in B | x_t = x, a_t = a),$$

donde $x\in X$, $a \in A(x)$, $B\in \boldsymbol{B}(X)$ y $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{a_t\}_{t=0}^{\infty}$ representan las sucesiones de estados y de controles, respectivamente.

Observación 2.1
Es posible, que en el modelo de control alguno de los elementos dependa del tiempo, digamos $(X_t, A_t, \{A_t(x): x\in X_t\}, Q_t, c_t)$, en este caso se llama Modelo de control no estacionario, pero este se puede transformar en un modelo estacionario (ver [6]).
En muchas aplicaciones la evolución de un Proceso de Decisión de Markov (PDM) se especifica por una ecuación a tiempo discreto de la forma:

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t), \quad t = 0,1,\cdots,$$

x_0 dado, donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, con valores en algún espacio *S,* distribución común μ e independiente del estado inicial x_0 . En este caso la ley de transición resulta en

$$Q(B|x,a) = EI_B[F(x,a,\xi)],$$

donde E es el operador esperanza e I_B es la función indicadora. Esta representación contiene, en particular, el caso de un sistema de control *determinista*

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t), \quad t = 0,1,\cdots,$$

para el cual la ley de transición es $Q(B|x,a) = I_B[F(x,a)]$

Políticas.
Considérese un modelo de decisión de Markov: (X, A, $\{A(x):x\in X\}$, Q, c) fijo. Denotemos por IF el conjunto de selectores medibles:

$$IF = \{f : X \to A | f \text{ es medible y } f(x) \in A(x) \forall x\}$$

Una *Política Markoviana* se define como una sucesión $\pi = \{f_t\}_{t=0}^{\infty}$ tal que $f_t \in IF$, para todo *t*. Si $f_t \equiv f \in IF$, para todo *t*, diremos que π es una *Política Estacionaria*. Por convención, identificaremos a IF con el conjunto de políticas estacionarias. Sea M el conjunto de políticas markovianas.

En la teoría de PDMs es usual considerar la clase Π de políticas aleatorizadas que dependen, en cada tiempo *t*, de la historia del proceso. En este trabajo no desarrollaremos el concepto de tal política, más sin embargo tomaremos a Π como la clase más grande de políticas a tratar. Nótese que se cumple:

$$IF \subseteq M \subseteq \Pi .$$

Criterio de rendimiento.
Para cualquier política $\pi \in \Pi$ y estado inicial $x \in X$, definimos el siguiente criterio de rendimiento:

$$V(\pi, x) = E_x^{\pi}\left[\sum_{t=0}^{N} \alpha^t c(x_t, a_t)\right], \qquad \mathrm{N} \le +\infty, \qquad (2.1)$$

llamado el *costo total esperado* α *-descontado*, donde $\alpha \in (0,1)$ se llama el factor de descuento y E_x^{π} denota la esperanza respecto a la medida de probabilidad P_x^{π} inducida por $x \in X$ y $\pi \in \Pi$ (Ver [1] y [6]).

Observación 2.2
Si tomamos α = 1 y $N = \infty$ en (2.1), tenemos el criterio llamado *costo total esperado* (ver [6]); si tomamos en (2.1), α = 1 y $N < \infty$, dividiendo entre $N+1$ y tomando límite superior cuando N tiende a infinito, obtenemos el criterio de *costo promedio esperado*.

La función

$$V^*(x) = \inf_{\pi} V(\pi, x), \qquad (2.2)$$

para $x \in X$, se define como la *función de valores óptimos.*

Una política $\pi^* \in \Pi$ se dice que es α *-óptima* si

$$V^*(x) = V(\pi^*, x), \qquad (2.3)$$

para todo $x \in X$. Entonces, el problema básico de los PDMs, conocido como el *Problema de Control Óptimo* consiste en:
"Determinar π^* que satisface (2.3)".

A continuación describiremos la Ecuación de Programación Dinámica (EPD) y el método de Iteración de Valores (IV). Estas técnicas son usuales en la teoría de PDMs, para la determinación de una política óptima y la caracterización de la función de valores óptimos. Éstas se cumplen bajo condiciones bastante generales (ver [1] y [6]). Más adelante, usaremos la EPD y el método de IV, para definir el concepto de HP.

Ecuación de Programación Dinámica.
Sea V^* definida en (2.2).
Entonces la EPD queda definida , para cada $x\in X$, como:

$$V^*(x) = \inf_{a\in A(x)}\left\{c(x,a) + \alpha\int V^*(y)Q(dy|x,a)\right\},$$

Bajo ciertas condiciones de continuidad y compacidad en algunos elementos del modelo de control de Markov considerado (ver [6]), es posible demostrar que el ínfimo en (2.4) se alcanza para una política estacionaria $f^* \in IF$, i. e.,

$$V^*(x) = c(x, f^*(x)) + \alpha\int V^*(y)Q(dy|x, f^*(x)). \qquad (2.4)$$

Sea

$$F^* = \{f \in IF | f \text{ satisface } (2.4)\}. \qquad (2.5)$$

Se puede demostrar que F^* es el conjunto de políticas estacionarias α -óptimas.

Iteración de valores.
Las funciones V_n:$X\to IR$, $n=0,1,...$ conocidas como *Funciones de Iteración de Valores* se definen como:

$$V_0(\cdot) \equiv 0 \ ;$$
$$V_n(x) = \inf_{a\in A(x)}\left\{c(x,a) + \alpha\int V_{n-1}(y)Q(dy|x,a)\right\}, \qquad (2.6)$$

para cada $x\in X$, $n \ge 1$.
Nuevamente, bajo condiciones de continuidad y compacidad en algunos elementos del modelo de control de Markov

considerado (ver [6]), se puede garantizar que para cada n = 1,2,..., existe una política estacionaria $f_n \in IF$ tal que:

$$V_n(x) = c(x, f_n(x)) + \alpha \int V_{n-1}(y) Q(dy | x, f_n(x)), \qquad (2.7)$$

para cada $x \in X$.

Observación 2.3

Con respecto a f_n definida mediante (2.7), es sabido (ver [6]) que es la primera decisión óptima del problema en n etapas con función de valores óptimos:

$$V_n(x) = \inf_{\pi \in \Pi} \sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t E_x^{\pi} c(x_t, a_t) \ . \qquad (2.8)$$

Sea

$$F_n = \{ f \in IF | f \text{ satisface } (2.8) \}, \quad n = 1,2 \cdots . \qquad (2.9)$$

Definición 2.4

Definimos un *Horizonte de Pronóstico* (HP), como un entero positivo N^*, tal que para cualquier problema de horizonte finito, mayor que N^*, existe una política óptima que coincide en los primeros n periodos con una política óptima del problema de horizonte infinito. A esos m primeros periodos se les llama *horizonte de planeación*. En el caso de que $m=1$, podemos escribir la definición de la siguiente manera: Si existe un entero positivo N* tal que: $F_n \subseteq F^*$, para toda $n \geq N^*$, lo llamaremos un HP.

Estamos interesados en los resultados que se han obtenido, para garantizar la existencia del HP. Es decir, en Teoremas del tipo siguiente:

Teorema de Horizonte de Pronóstico (THP)

Bajo las hipótesis H_i, existe un HP.

Lo que haremos en las siguientes secciones, es describir los resultados de ese tipo precisando las correspondientes hipótesis H_i, para las cuales se ha dado la existencia del HP.

3. MODELOS DETERMINISTAS

En esta sección, se presentan los resultados de horizonte de planeación y de pronóstico, que se desarrollaron en un contexto determinista. Los primeros trabajos se recopilan en el artículo de Lundin y Morton (L&M), (ver [7]), en donde extienden los resultados previos de horizonte de planeación y pronóstico. Ellos dan un Teorema de HP para un problema de inventarios, el cual presentamos a continuación:

Modelo L&M

Sean

x_t : el *nivel de inventario* en el periodo t, $t=1,2,...,T$,

a_t : la cantidad de producto que se ordena producir en el periodo t, $t=1,2,...,T$,

d_t : la *demanda en el periodo* t, $t=1,2,...,T$, ($d_t \geq 0$).

$x_{t+1} = x_t + a_t - d_t$: la dinámica del modelo de inventarios.

$$c_t(a_t) = \begin{cases} k_t + ca_t, & a_t > 0 \\ 0, & a_t = 0, \end{cases}$$

donde $k_t, a_t \geq 0$, define el *costo de producir* a_t unidades en el periodo t.

$h_t(x_t) = h_t \cdot x_t$, el *costo de almacenamiento* del inventario x_t , del periodo t al periodo $t+1$, (h_t , $x_t \geq 0$).

Para enunciar su Teorema de HP, ellos hacen las siguientes suposiciones.

Suposiciones H_1

Para el Modelo L&M, ellos suponen que

a. $x_0 = 0$ y el problema se resuelve con $x_T = 0$. Donde T es el tamaño del horizonte del problema, i. e., la solución óptima de T-periodos se define como la solución de costo mínimo para los primeros T periodos con $x_T = 0$.

b. $X = IR$, $A=A(x)=[0,\infty)$.

Ellos (L&M) mostraron que los Teoremas de Horizonte de Planeación, descritos a continuación, de trabajos previos a su artículo (ver [7]), son casos especiales de sus resultados. Consideramos el Modelo L&M de Inventarios, suponemos que en todos los periodos, los costos y demandas son no negativos y $\alpha = 1$.

Un primer trabajo, el cual se refiere al concepto de HP, es el artículo de Wagner-Whitin (ver [11]). En el se presenta un resultado de horizonte de planeación y pronóstico, para una versión más simple del ejemplo de inventarios considerado por L&M:

Suposiciones H_2

Considerar el Modelo L&M, con el siguiente costo

$$c(x_t, a_t) = i_{t-1} x_t + \delta(a_t) k_t$$

donde

i_{t-1} : es un cargo o interés por inventario, del periodo t-1 al periodo t.

k_t : es un costo por ordenar.

$$\delta(a_t) = \begin{cases} 0, & a_t = 0 \\ 1, & a_t > 0. \end{cases}$$

Otro resultado de horizonte de planeación se debe a Zabel, este presenta un resultado de HP (ver [12]), cuando los costos de orden por unidad son una sucesión de parámetros no negativos. Su propuesta se basa en las siguientes hipótesis:

Suposiciones H_3
Para el Modelo L&M, considera el siguiente costo

$$c(x_t, a_t) = i_{t-1}x_t + \delta_t(a_t)$$

donde

i_{t-1} :es una cargo o interés por inventario, del periodo *t-1* al periodo *t*.

$$\delta_t(a_t) = \begin{cases} 0, & a_t = 0 \\ k_t + b_t a_t, & a_t > 0, \end{cases}$$

k_t : es un costo por ordenar.

b_t : es un costo unitario por pedido o costo de producción marginal.

Supone que b_t , al igual que los otros costos, para el periodo t es un parámetro no negativo finito.

En el estudio de Eppen, Gould y Pashigian (ver [5]), los autores permiten que el costo de producción marginal (b_t) sea variable con el tiempo y derivan un Teorema de HP.

Suposición H_4
Considera las Suposiciones H_3 con costo de producción marginal (b_t) variable con el tiempo.

Blackburn and Kunreuther (ver [2]) dieron un resultado de HP para cubrir el caso de acumulación de demanda suponiendo costos de penalización y acumulación cóncavos. Para ellos la cantidad producida en el inicio del periodo t, a_t es no negativa y x_t es el inventario al final del periodo.

Suposiciones H_5
a. El costo de producción en el periodo t es

$$c_t(x_t, a_t) = k_t\delta(a_t) + c_t a_t,$$

donde

$$\delta(a_t) = \begin{cases} 0, & a_t = 0 \\ 1, & a_t > 0. \end{cases}$$

b. Ellos suponen que el costo relativo al inventario para el periodo t, satisface:

i. es cóncavo en el intervalo (- ∞ , 0] - la región de acumulación,

ii. es cóncavo en el intervalo [0 , ∞) - la porción de manutención.

Thomas (ver [10]) estudió el mismo sistema que Eppen et al. (ver [5]), pero él incluyó precios, así que $d_t = \phi_t(p_t) =$ la demanda en el periodo t cuando la variable de decisión precio es $p_t(d_t \geq 0)$, i.e., la demanda en cada periodo t es una función del precio del producto. Su trabajo consideró el problema de un monopolista que debe hacer decisiones, en cada uno de los periodos *T*: la decisión de producción considerando el efecto sobre los beneficios de decisiones precio-producción. Thomas Obtuvo los mismos resultados de HP que Eppen et al. (ver [5]) para esta generalización. L&M presentan una generalización de este resultado de horizonte de planeación, considerando suposiciones similares a las de Thomas.

En trabajos posteriores Chand, Sethi y Sorger (ver [3]), presentan resultados de HP. Ellos consideran un modelo de control de inventarios, con criterio de costo descontado. Para presentar su resultado de HP consideran las siguientes hipótesis.

Suposición H_7

a. α, es el factor de descuento, $0 < \alpha \leq 1$.

b. *β*, es el costo de producción por unidad $\beta \geq 0$.

c. *k*, el costo de producción $k > 0$.

d. *h*, el costo de almacenamiento, $h > 0$.

e. El costo se define como $c(x_t, a_t) = g(a_t) + hx_t$, donde

$$g(a) = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ k + \beta a, & a > 0, \end{cases}$$

f. $X = A = [0, \infty)$.

g. Para el problema de *N*-periodos se supone $x_0 = x_N = 0$.

Otro trabajo que propone resultados de HP es el artículo de Smith y Zhang (ver [9]). Ellos consideran la planeación de la producción sobre el horizonte infinito en un sistema con costos de producción y mantenimiento del inventario, convexos. Primeramente probaron que bajo condiciones muy generales, para versiones de horizonte finito del problema, existe un nivel de producción óptimo en cualquier época de decisión.

También proporcionan condiciones bajo las cuales, una versión de horizonte finito del problema, tiene una primera decisión óptima, que coincide con una primera decisión óptima de horizonte infinito. Las condiciones son las siguientes.

Suposiciones

a. Los costos de producción y de mantenimiento del inventario son convexos, i.e., $c_t(\cdot)$ y $h_t(\cdot)$ son funciones convexas con $c_t(0) = h_t(0) = 0$ para toda $t = 1, 2, \cdots$.

b. Existe un plan de producción factible de costo finito, para el problema de horizonte infinito.

c. Los costos de producción están acotados uniformemente superiormente y no son cero, i.e., $f_t \in IF$, para toda $t=0,1,2,\ldots$, para todos los enteros $a_t > 0$ y toda $t = 1, 2, \cdots$.

Ellos demostraron el Teorema siguiente. El cual les garantiza la existencia de un HP.

Teorema 3.1
$\hat{\pi}$ es óptima de horizonte infinito, por lo tanto $\pi^*(N)$ converge monótonamente (en forma creciente ↑) a un plan de producción óptimo de horizonte infinito, i.e.,

$$\pi_t^*(T) \uparrow \hat{\pi}_t,$$

cuando $T \to \infty$, para todo $t = 1,2,...$.

4. MODELOS ESTOCÁSTICOS

En el trabajo [4], se proporciona un resultado de HP, en un contexto estocástico. Las suposiciones que se proponen son las siguientes.

Suposiciones H_8.

a. $X = IR$,

b. $A = A(x) = [0,\infty) \qquad \forall x \in X$,

c. $c(x,a) = h(x) + g(a)$, donde *h* es lineal y no negativa e independiente de a y *g:IR → IR* medible, con un mínimo en a_0,

d. $x_{t+1} = x_t + g(a_t) - \xi_t$, donde $\{\xi_t\}$ son variables aleatorias i.i.d., con función de densidad de probabilidad *D*, para toda *t* y con esperanza finita $\mu \equiv E(\xi)$.

Observación 4.1 El teorema correspondiente, también se satisface si modificamos las funciones de la Suposición H_8 por:

$$c(x,a) = h(x) + k_1 g(a),$$

y

$$x_{t+1} = x_t + k_2 g(a) - \xi_t,$$

donde k_1, k_2 son reales no negativos fijos.

EJEMPLO DE INVENTARIOS.
Ahora se presenta un ejemplo en el cual se obtiene un HP, en un contexto más general que los resultados mencionados anteriormente (ver [8]).

Para t = 0, 1, ... , n-1, denotamos por:

x_t : al nivel de existencias al final del periodo t;

a_t : a la cantidad producida durante el periodo t;

ξ_t : a la demanda durante el periodo t.

$x_{t+1} = x_t + a_t - \xi_t$:la dinámica del sistema,

$$c(x_t, a_t, \xi_t) = ba_t + h\max(0, x_{t+1}) + p\max(0, -x_{t+1}),$$

el costo. Donde

b: costo de producción unitario.

h: costo de manutención unitario por exceso de inventario.

p: costo unitario por demanda no satisfecha.

b, h, p > 0 y *p* > *b*.

$A = A(x) = [0, \infty) \;\; \forall\, x \in X.$

$\xi_t \geq 0$, para *t=0,1,...,* variables aleatorias i.i.d., con F.D. D suponemos que $E[\xi_0] < \infty$.

El problema es minimizar el costo descontado total esperado.
Por Iteración de Valores, podemos concluir que la política óptima para un modelo de n-periodos, es ordenar hasta S, cuando el nivel de inventario es menor que S, no ordenar en otro caso. El valor de *s* se determina al minimizar el costo, por iteración de valores. Por lo tanto, para todos los periodos:

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > s \\ s - x & \text{si} \quad x \leq s \end{cases}$$

Tomando el límite, cuando *n* tiende a infinito, se puede concluir que la política óptima para un modelo de horizonte infinito es ordenar hasta S cuando el nivel de inventario es menor que S y no ordenar en otro caso, es decir, la misma política de horizonte finito.

Observación 4.2

a. En este ejemplo **estocástico** se tiene que la política óptima en cada etapa es la misma, incluso en el problema de horizonte infinito.

b. El conjunto de controles no es finito.

c. Podemos concluir que los conjuntos F_n, para toda *n* y F^* son iguales.

d. En esta situación el horizonte de pronóstico es $N^* = 1$.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha presentado una revisión de un resultado que garantiza la existencia de un entero no negativo, llamado Horizonte de Pronóstico, en sistemas de inventarios. Es de importancia este tipo de resultado, que caracteriza al HP, pues en algunas aplicaciones, se puede hacer planeación sin tener que resolver el problema de horizonte infinito. Sin embargo, los resultados presentados no incluyen al ejemplo de la sección anterior, por lo tanto, se plantea la posibilidad de proponer un teorema de HP más general, para cubrir a dicho ejemplo. Finalmente se presenta una tabla en donde se resumen los artículos que se revisaron. En ella se bosqueja el tipo de modelo, costo y resultado obtenido.

AUTOR	MODELO	COSTO	RESULTADO
WAGNER/WHITIN (ver [11])	DETERMINISTA	CARGO POR INVENTARIO + COSTO POR ORDENAR	TEOREMA DE EXISTENCIA DE HP
ZABEL (ver [12])	DETERMINISTA	CARGO POR INVENTARIO + COSTO POR ORDENAR+ COSTO DE PRODUCCIÓN MARGINAL	TEOREMA DE EXISTENCIA DE HP
EPPEN ET AL. (ver [5])	DETERMINISTA	CARGO POR INVENTARIO + COSTO POR ORDENAR+ COSTO DE PRODUCCIÓN MARGINAL (VARIABLE)	TEOREMA DE EXISTENCIA DE HP
THOMAS (ver [10])	DETERMINISTA	IGUAL AL ANTERIOR INCLUYENDO PRECIOS	TEOREMA DE EXISTENCIA DE HP
BLACKBURN/ KUNREUTHER (ver [2])	DETERMINISTA	IGUAL AL DE EPPEN ET AL INCLUYE COSTOS POR ACUMULACION	TEOREMA DE EXISTENCIA DE HP
LUNDIN/MORTON (ver [7])	DETERMINISTA	GENERALIZA LOS ANTERIORES	TEOREMA DE EXISTENCIA DE HP
CHAND, SETHI Y SORGER. (ver [3])	DETERMINISTA	COSTO FIJO POR ORDENAR, COSTO POR ALMACENAR Y COSTO UNITARIO.	SE OBTIENE EXPLÍCITAMENTE N^*.
SMITH Y ZHANG (ver [9])	DETERMINISTA	COSTO UNITARIO Y DE MANUTENCION DEL INVENTARIO	TEOREMA DE EXISTENCIA DE HP.
ROSS (ver [8])	ESTOCÁSTICO	GENERAL	SE PRUEBA QUE $N^*=1$.
CRUZ-SUÁREZ (ver [4])	ESTOCÁSTICO	ADITIVO: FUNCION DEL ESTADO + FUNCION DE LA ACCION	SE PRUEBA QUE $N^*=1$

TABLA 1. RESUMEN DE ARTÍCULOS CON TEOREMA DE HP.

6. REFERENCIAS.

1. Bertsekas, D. P., "Dynamic Programming and Optimal Control", Athena Scientific, Vol. 1, 1995.

2. Blackburn, J. D. & Kunreuther, H., "Planning Horizons for the Dynamic Lot Size Model with Backlogging", Management Science, Vol. 21, No. 3, 1974, 251-255.

3. Chand, S., Sethi, S. P. & Sorger, G., "Forecast Horizons in the Discounted Dynamic Lot Size Model", Management Science, vol. 38, No. 7, 1992, 1034-1048.

4. Cruz-Suárez, H. D., "Horizonte de pronóstico en procesos de control de Markov", Memorias CISCI 2002, Vol. 2, 269-271.

5. Eppen, G. D., Gould, F. J., Pashigian, B. P., "Extensions of the Planning Horizon Theorem in the Dynamic Lot Size Model ", Management Science, Vol. 15, No. 5, 1969, 268-277.

6. Hernández-Lerma, O y Lasserre, J.B., "DiscreteTime Markov Control Processes", Springer-Verlag, New York, 1996.

7. Lundin, R. A., Morton, T. E., "Planning Horizons for the Dynamic Lot Size Model: Zabel vs. Protective Procedures and Computational Results", Operations Research, Vol. 23, No. 4, 1975, 711-734.

8. Ross, S. M., "Applied Probability Models with Optimization Applications", Dover, New York, 1992.

9. Smith, R. L. & Zhang R. Q., "Infinite Horizon Production Planning in Time-varying Systems with Convex Production and Inventory Costs", Management Science, Vol. 44, No. 9, 1998, 1313-1320.

10. Thomas, J., "Price-Production Decisions with Deterministic Demand", Management Science, Vol. 16, No. 11, 1970, 747-750.

11. Wagner, H. M., & Whitin, T. M., "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", Management Science, pp. 86-96, 1958, 89-96.

12. Zabel, E., "Some Generalizations of an Inventory Planning Horizon Theorem", Management Science, Vol. 10, No. 3, 1964, 465-471.