Software matemático para asignaturas de contenidos físico-matemáticos

Concepción MURIEL
Departamento de Matemáticas
Juan Manuel VIDAL
Departamento de Construcciones Navales
Adrián RUÍZ, Juan B. GARCÍA, Pablo PINIELLA
Alumnos colaboradores del Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz,
11510 Puerto Real, Cádiz, España

RESUMEN

Se describen algunas de las rutinas elaboradas con el programa Mathematica para la enseñanza de asignaturas con contenidos matemáticos relacionados con el cálculo vectorial. La creación de ejercicios interactivos facilitan la comprensión de contenidos matemáticos y el aprendizaje de técnicas que requieren estas disciplinas.

Palabras clave: análisis vectorial, integración, orientación, aplicaciones físicas, software, innovación docente, evaluación.

1. INTRODUCCIÓN

La Declaración de Bolonia (1999), suscrita inicialmente por 30 países europeos y con más de 40 participantes en la actualidad, sienta las bases para la construcción de un *Espacio Europeo de Educación Superior* (EEES) que modifica profundamente las metodologías para la transmisión del conocimiento en el entorno universitario. Los nuevos estudios cuantifican el trabajo durante el proceso de aprendizaje, en un contexto de renovación metodológica docente y de evaluación continua de los conocimientos y de las competencias adquiridas. El EEES implica una nueva manera de enseñar y de aprender centrado en el alumno.

Este nuevo marco obliga al profesor universitario a renovar su propia formación, su metodología, sus materiales didácticos y los sistemas tradicionales de evaluación. Con objeto de mejorar tanto el aprendizaje de los alumnos como la forma de enseñar de los profesores, la Unidad de Innovación docente de la Universidad de Cádiz en España convoca anualmente Proyectos de Innovación y Mejora Docente. Los resultados presentados en este trabajo se enmarcan dentro del proyecto PI1-12-005 titulado "*Diseño de metodologías y elaboración de material docente para la organización, planificación y coordinación de asignaturas con contenidos físico-matemáticos*". El proyecto de innovación docente tiene como objetivos principales:

- Fomentar el intercambio de recursos docentes entre los departamentos, adecuando los mismos para compartir experiencias de laboratorio.
- Desarrollar una metodología común entre departamentos que favorezca el carácter interdisciplinar de algunas materias.

Las principales líneas de trabajo del proyecto son las siguientes:

1. Diseñar y mejorar la clases prácticas y talleres de asignaturas con contenidos físico-matemáticos de diferentes titulaciones.
2. Coordinar contenidos de asignaturas y nomenclaturas físico-matemáticas.
3. Mejorar la exposición magistral en este tipo de asignaturas mediante material gráfico y animaciones.
4. Potenciar el trabajo activo del alumno con la creación de ejercicios interactivos en entornos informáticos amigables.

Uno de los resultados del proyecto es la creación de un marco de interacción entre profesores de diferentes titulaciones y/o áreas de conocimiento que produzca beneficios en un doble sentido: las asignaturas de Matemáticas se enriquecen con casos prácticos y las de Ciencias Experimentales (Física, Ingenierías, etc.) pueden avanzar con más facilidad si utilizan la misma notación y conceptos que el alumno estudia en asignaturas de Matemáticas. Para ello se crean materiales didácticos comunes que permitan una metodología diferente e innovadora en estas disciplinas: se potencia el uso de las nuevas tecnologías para que el alumno pueda ir resolviendo problemas de forma interactiva y agudizar su pensamiento crítico.

Uno de los materiales didácticos creados durante el proyecto de innovación es un software informático, interactivo y específico para la enseñanza del Cálculo Vectorial y sus aplicaciones e interpretaciones físicas ([5],[9],[8]). En este trabajo nos centramos en los contenidos más matemáticos del software y en el análisis de resultados en alumnos que han cursado la asignatura Análisis Vectorial de tercer curso del grado en Matemáticas que se imparte en la Universidad de Cádiz. Un enfoque centrado en las aplicaciones a problemas prácticos en las Ciencias Experimentales, sus interpretaciones físicas y el análisis de resultados para alumnos de Ingenierías son presentados en [16].

Las rutinas han sido creadas usando Mathematica 8.0 por su potencia gráfica y la posibilidad de crear proyectos elaborados que pueden ser muy complicados de realizar en otros lenguajes de programación ([1],[4],[7],[17]). Además, las nuevas instrucciones incluidas en las últimas versiones para realizar animaciones, que permiten al usuario manipular gráficos o cálculos de forma interactiva, se adaptan a la perfección a las necesidades propias de estas disciplinas. El paquete de rutinas se ha creado en base a la necesidad de desarrollar los contenidos que se describen a continuación, agrupados en diferentes unidades didácticas.

2. VARIEDADES DIFERENCIABLES

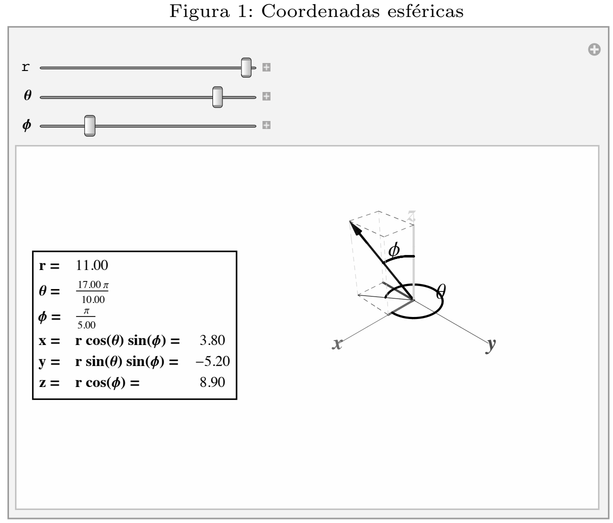
El alumno de la titulación de Grado en Matemáticas se ha encontrado en cursos anteriores de cálculo de una y/o varias variables con variedades diferenciables descritas como gráficas de funciones. Este concepto previo se formaliza mediante la representación explícita. Localmente, estos conjuntos son gráficas de funciones diferenciables, expresadas en alguna base ordenada de $\mathbb{R}^n$. Si la base es la canónica, las órdenes de Mathematica más adecuadas a este tipo de representación son las instrucciones Plot y Plot3D para representar gráficas de funciones en $\mathbb{R}^2$y en $\mathbb{R}^3$. El uso de bases diferentes requiere utilizar otras instrucciones como ParametricPlot y ParametricPlot3D.

Muchos conjuntos de la geometría clásica aparecen al describir un recinto como el lugar geométrico de los puntos del plano o del espacio que satisfacen unas condiciones descritas por una o varias ecuaciones. Se formaliza matemáticamente el concepto de representación implícita, especialmente adecuada para describir conjuntos que se obtienen como cortes o intersecciones de otros, y se introducen las órdenes de Mathematica necesarias para representar curvas y superficies dadas en forma implícita (ContourPlot, ContourPlot3D).

En otras ocasiones es muy natural describir un conjunto por medio de uno o varios parámetros que fijan de forma inequívoca la posición de los puntos del conjunto. Las órdenes ParametricPlot y ParametricPlot3D con sus opciones son las adecuadas para representar conjuntos descritos en forma paramétrica. Los cambios de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas juegan un papel fundamental a la hora de aprender a parametrizar ciertas curvas y superficies. La potencia de las últimas versiones del Mathematica son de gran ayuda para comprender el significado de los parámetros involucrados en los nuevos sistemas de coordenadas ([2],[10]).

En la Figura 1 se muestra una rutina sobre las coordenadas esféricas, que permite experimentar al alumno eligiendo los valores de los parámetros y observando los cambios producidos sobre la gráfica. Automáticamente el procedimiento calcula y escribe las correspondientes coordenadas del punto en ambos sistemas de coordenadas. Rutinas análogas permiten trabajar con las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ y las coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.

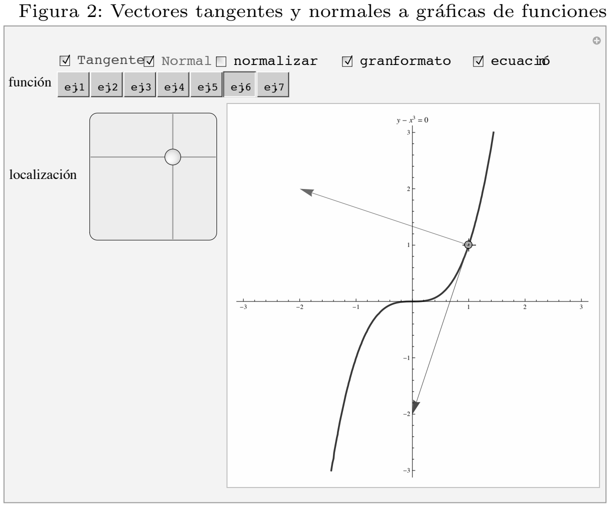
Figura 1: Coordenadas esféricas



La noción de recta tangente a la gráfica de una función de una variable se generaliza para introducir el concepto de espacio afín tangente utilizando representaciones explícitas. A través de las equivalencias entre las distintas representaciones se deducen formas alternativas de calcular espacios tangentes y se introducen las instrucciones del programa necesarias para realizar los cálculos. Es muy importante que el alumno aprenda a calcular vectores tangentes utilizando las diferentes respresentaciones y que sepa elegir entre ellas la que más se adapta a cada recinto.

Animaciones como la de la Figura 2, inspirada en [14], es muy útil para representar de forma interactiva los vectores tangentes y normales a curvas en $\mathbb{R}^2$. El alumno puede elegir qué tipo de vector quiere representar y se pueden elegir diferentes recintos de funciones, con diferentes características. Los vectores pueden normalizarse a elección. La selección del punto sobre el que se quieren representar dichos vectores se realiza sobre un panel bidimensional, de forma que ambos vectores se dibujan sobre cualquier punto del espacio, y no sólo sobre los puntos de la gráfica. Es un excelente ejercicio para ilustrar el concepto de campo vectorial, que aplica a cada punto un vector. De esta forma se facilita la comprensión de los conceptos de campos vectoriales tangentes y/o campos vectoriales normales a una variedad que se usarán en posteriores unidades didácticas.

Figura 2: Vectores tangentes y normales a gráficas de funciones



Entre las competencias específicas que el alumno adquiere en esta unidad didáctica se destacan:

1. Saber dibujar curvas y superficies en el plano y en el espacio dadas en forma implícita, explícitas y paramétricas.

2. Saber decidir intuitivamente a partir de las representaciones gráficas y un conjunto es variedad diferenciable o no.

3. Entender el concepto de curva y/o superficie de nivel y saber decidir cuándo son variedades diferenciables.

4. Reconocer recintos clásicos a partir de sus ecuaciones implícitas.

5. Entender el significado de los parámetros en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

6. Saber parametrizar curvas y superficies

7. Saber calcular y dibujar la recta tangente a una curva y el plano tangente a una superficie utilizando diferentes representaciones.

8. Saber calcular y dibujar vectores normales a una variedad utilizando diferentes representaciones.

9. Utilizar animaciones para visualizar vectores tangentes y vectores normales.

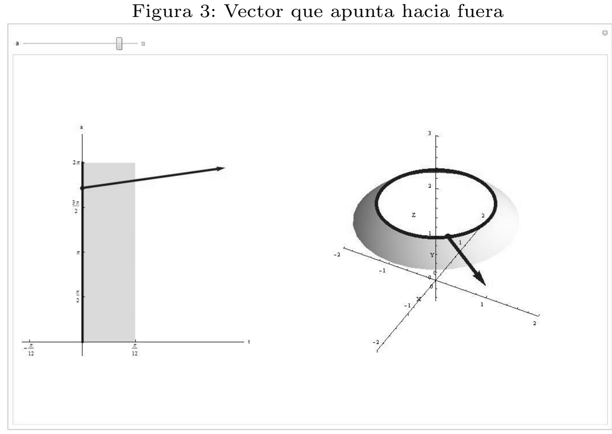
3. ORIENTACIÓN

El cambio de signo en una integral de Riemman de una función de una variable cuando se intercambian los límites de integración es una idea sencilla que justifica la necesidad de definir conceptos como recorrer una curva de izquierda a derecha, la cara exterior de una superficie, etc. Estos conceptos se usan constantemente en los textos de cálculo vectorial sin mucha precisión, pues dependen del punto de vista del observador. Por otro lado, definiciones basada en formas fundamentales, sistemas continuos de orientaciones, etc., usuales en libros de matemática avanzada ([6],[15]), son demasiado abstractos y dificultan la compresión intuitiva del concepto de orientación.

En este tema tan delicado, las órdenes de manipulación dinámica (Manipulate, Animate) de las últimas versiones del Mathematica son de especial utilidad. El software desarrollado incluye rutinas que permiten:

1: Visualizar el concepto de vector que apunta hacia fuera en puntos del borde de variedad con pseudo-borde ([12],[13]). En la Figura 3 se muestra una aplicación de la rutina, que permite visualizar los vectores en cada punto del borde. Utilizando diferentes vectores en el espacio de los parámetros, el alumno comprueba que el signo de la primera coordenada es el que determina el sentido del vector en el borde de la variedad.

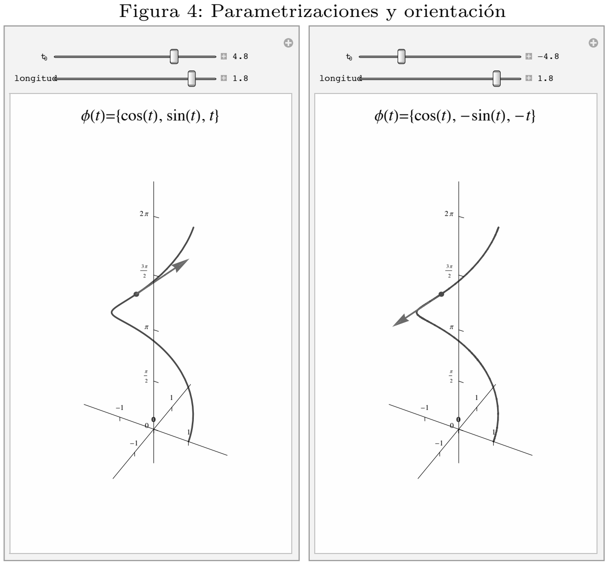
Figura 3: Vector que apunta hacia fuera



2: Dibujar animaciones para visualizar la orientación a través de campos de vectores tangentes, transversales y normales en el caso de hipersuperficies.

3: Comprobar de una forma interactiva si una parametrización es coherente o no con una orientación prefijada. La rutina presentada en la Figura 4 permite elegir diferentes parametrizaciones y dibujar un vector tangente en cada punto de la curva. El movimiento del vector a lo largo de la curva ayuda a visualizar la orientación que la parametrización elegida define sobre la curva.

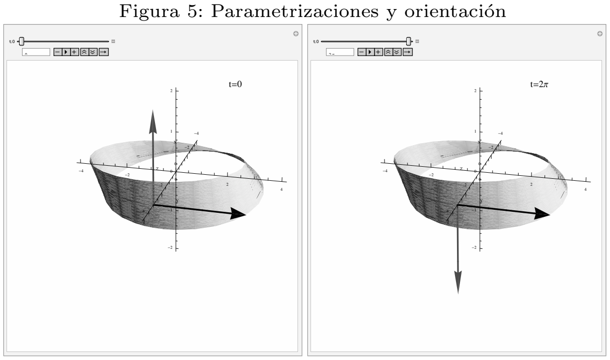
Figura 4: Parametrizaciones y orientación



4: Determinar visualmente la orientación inducida en el borde por una orientación prefijada en la variedad.

5: Comprender el concepto de no-orientabilidad con animaciones utilizando la banda de Möbius (Figura 5).

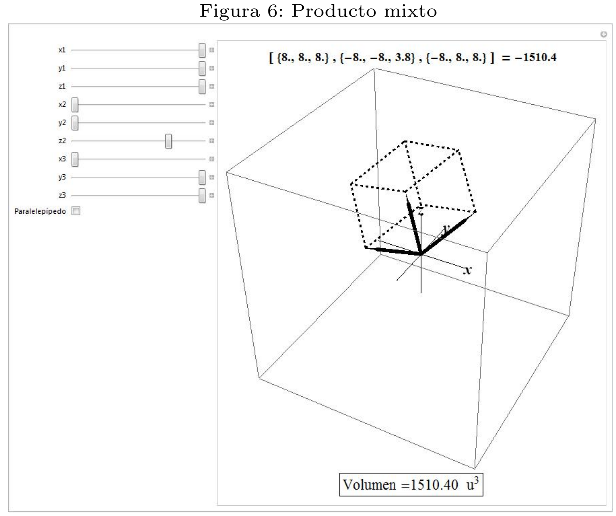
Figura 5: Parametrizaciones y orientación



4. MEDIDA E INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

El alumno del grado en Matemáticas conoce de la teoría de integración como asociar longitudes, áreas y volúmenes a los subconjuntos medibles en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sin embargo, la medida de Lebesgue asocia valor cero a un segmento en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, a una superficie en $\mathbb{R}^3$ y no proporciona una medida de longitud en $\mathbb{R}^2$ ni una medida de área en $\mathbb{R}^3$. Comenzando por el caso más sencillo se establece un concepto de medida adecuada sobre los subespacios de un espacio vectorial para llegar de forma natural al concepto de medida de paralelepípedo y su relación con del producto exterior de los vectores que lo dirigen. Con órdenes del tipo Wedge o Cross se pueden resolver fácilmente los problemas de cálculo en estas situaciones sencillas. En la Figura 6 se muestra la interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores en el espacio. El alumno puede seleccionar las coordenadas de los vectores y la rutina los dibuja y calcula el valor de su producto mixto. Opcionalmente puede mostrarse el paralelepípedo que forman dichos vectores y su volumen se calcula de forma dinámica.

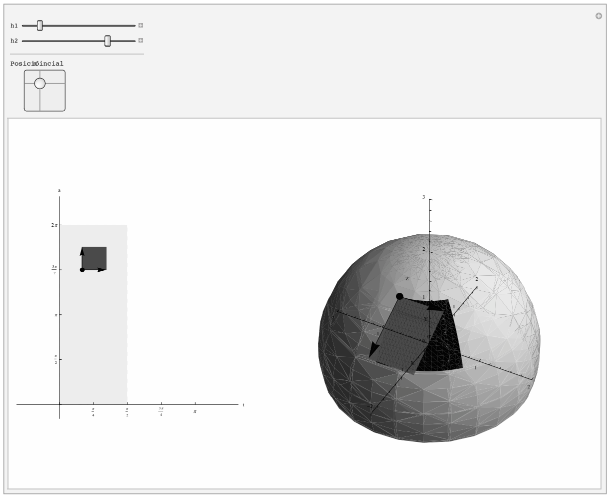
Figura 6: Producto mixto



Al concepto de medida (local) en una variedad puede llegarse de forma heurística por aproximaciones de medida de paralelepípedos construidos sobre cada espacio tangente. En la Figura 7 se muestra el resultado de aplicar una rutina que representa dichos paralelepípedos y su proyección como una región sombreada en la superficie, con la posibilidad de modificar todos los elementos de forma interactiva, ayudan a entender de una forma muy efectiva este procedimiento de medida por aproximación y a interpretar el elemento de medida (longitud o superficie) como el factor de expansión entre la medida en $\mathbb{R}^k$.

Se diseñan diferentes rutinas para automatizar

Figura 7: Medidas en una variedad



el cálculo de integrales de línea y superficie. Las nuevas órdenes PlotVectorField, ListPlotVectorField, GradientFieldPlot, y sus versiones en 3D incluidas en la versión 8.0 del programa Mathematica son utilizadas para explicar la interpretación física de una integral de linea en términos del trabajo al considerar el campo como un campo de fuerzas o de una integral de superficie como el flujo del campo a través de la superficie.

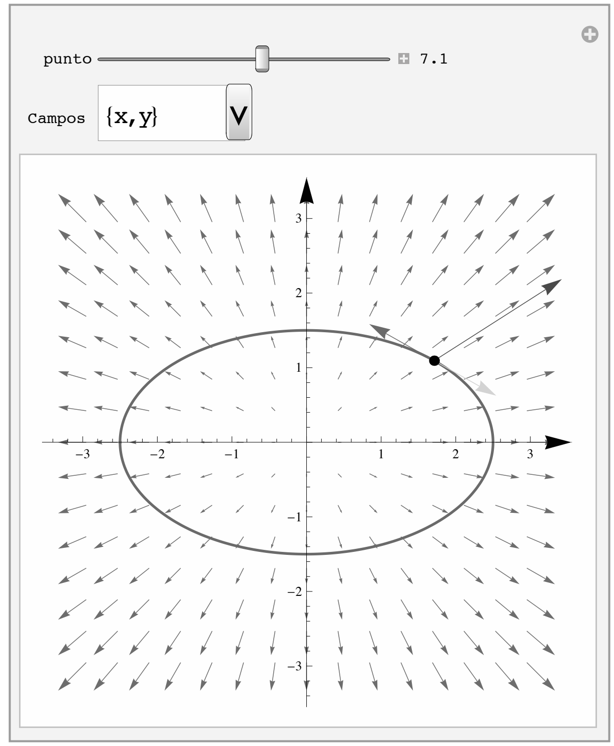
La Figura 8 muestra los objetos que intervienen en la evaluación de una integral de linea en $\mathbb{R}^2$ ([3]). Los alumnos pueden cambiar la curva o utilizar diferentes parametrizaciones para investigar el efecto de la orientación sobre el resultado de la integral. El campo vectorial que se integra también puede elegirse a conveniencia.

5. LOS TEOREMAS CLÁSICOS DEL ANÁLISIS VECTORIAL

Los teoremas clásicos del análisis vectorial aparecen como casos particulares del teorema de Stokes general, usualmente presentado y demostrado en los textos de matemática avanzada en el lenguaje de las formas diferenciales. La potencia de Mathematica como programa de cálculo simbólico facilita la comprensión, mediante comprobación directa de cálculos, de la equivalencia entre el enfoque clásico (campos vectoriales y escalares) y el enfoque moderno de las formas diferenciales. Al mismo tiempo, el alumno adquiere la agilidad y destreza necesarias para utilizar indistintamente ambas técnicas. En esta traducción de lenguajes, las operaciones clásicas (gradiente, rotacional, divergencia etc.) aparecen asociadas a la diferencial exterior de formas diferenciales ([12]).

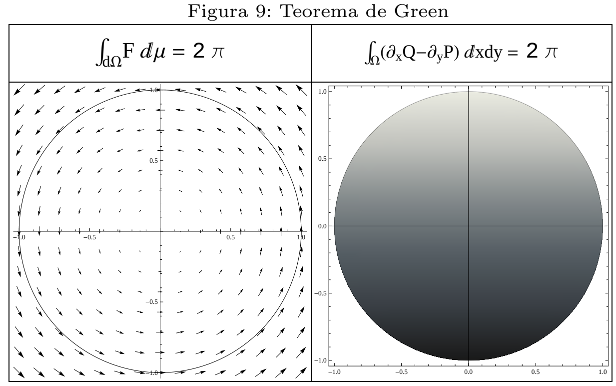
Los teoremas de Green, Stokes clásico, y de la

Figura 8: Integral de linea



divergencia nos permiten en particular establecer significados físicos para los conceptos de divergencia y rotacional. Todas estas operaciones entre campos escalaras y/o vectoriales están implementadas como instrucciones del package Vector Analysis. La figura 9 muestra un ejemplo de aplicación del teorema de Green sobre una circunferencia. El alumno podrá comprobar la equivalencia entre calcular la integral de línea en la circunferencia o hallar la integral en su interior.

Figura 9: Teorema de Green



Este mismo procedimiento permite al alumno comprobar la importancia de la orientación cuando se calcula la integral de línea. Por un lado el alumno puede observar como cambia el signo de la integral al cambiar la orientación (figura 10), así como verificar que la misma es cero cuando se aplica a un campo conservativo.

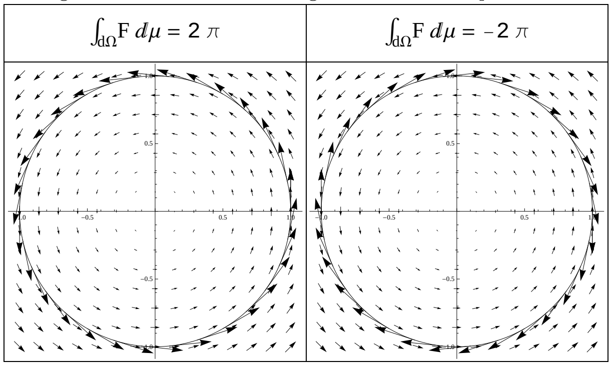


Figura 10: Orientación e integración de un campo vectorial

Además de ejercicios de verificación del teorema de Stokes, se incluyen otros ejercicios interactivos de cálculos típicos de asignaturas de física, como puede ser la determinación de centros de gravedad y momentos de superficies.

6. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

El material elaborado se organizó en diferentes laboratorios agrupados por unidades temáticas. La docencia de la asignatura Análisis Vectorial se impartió durante el primer semestre del curso académico 2011-2012 para alumnos del tercer curso del grado en Matemáticas en la Universidad de Cádiz. Cada alumno recibe tres sesiones de una hora dirigidas por el profesor más dos horas a la semana dedicadas a los laboratorios. Las clases de laboratorio se dividen en grupos, con una media de diez alumnos por aula. A través del campus virtual de la Universidad de Cádiz los alumnos disponen del material con antelación, incluyendo información sobre los objetivos que se desean alcanzar en cada taller y las pruebas que tienen que realizar y entregar para su evaluación. En la primera de las dos sesiones el profesor explica los contenidos y los procedimientos de los que consta cada laboratorio, mostrando ejemplos resueltos, como colección de problemas tipo. En la segunda de las sesiones el alumno experimenta con el material y trata de resolver los problemas propuestos; se fomenta la participación en grupos aunque la entrega de ejercicios es individual. El profesor supervisa los progresos y resuelve las posibles dificultades o dudas que están surgiendo. Al final de la segunda sesión el alumno dispone de un tiempo limitado para enviar sus respuestas a través del campus virtual. Adicionalmente, se realizó unas clases-problemas con algunos de los contenidos de este trabajo con alumnos de Ingeniería Naval y Oceánica e Ingeniería Marina, Náutica y Transporte Marítimo.

Con el objetivo de evaluar la eficacia del método de aprendizaje, se plantea una serie de tests y pruebas con alumnos de los primeros cursos de los grados que tienen asignaturas comunes de matemáticas y física general.

El diseño utilizado fue en formato de encuesta a partir de 14 preguntas cerradas. Se presentaron 14 afirmaciones para que los alumnos las clasificaran, en una escala de 5 a 0, desde totalmente de acuerdo (5) a totalmente desacuerdo(0).

Dividida en tres partes, en la primeras 5 preguntas se intenta indagar si la dificultad que encuentra el alumno en los problemas se debe a los conceptos físicos en sí o al aparato matemático que se necesita para su desarrollo y la coherencia de nomenclaturas a la hora de explicar los mismos conceptos en asignaturas de física y matemáticas. La segunda parte, estudia la percepción que el alumno tiene sobre la aplicación de los conceptos matemáticos en física y viceversa, así como sus posibles aplicaciones en posteriores asignaturas. La última parte, desde la pregunta 9 a la 14, se preguntó sobre la apreciación del alumno de la eficacia del método tradicional de desarrollo del tema en la pizarra o del método de intercalar prácticas con computadoras. El cuestionario fue el siguiente:

1. Entiendo los conceptos físicos que se explican.
2. Entiendo el desarrollo matemático que se utiliza para explicar los conceptos físicos.
3. Entiendo la nomenclatura matemática.
4. La nomenclatura matemática era conocida.
5. Había aprendido los conocimientos previos necesarios en otras asignaturas.
6. Los conceptos matemáticos me fueron útiles para comprender los algunos conceptos físicos.
7. Las interpretaciones físicas me ayudaron a comprender algunos conceptos matemáticos
8. Creo que los conceptos físicos-matemáticos estudiados en la asignatura me serán útiles para otras asignaturas.
9. Considero suficiente la colección de ejercicios prácticos.
10. El contenido teórico de la asignatura es adecuado.
11. Los recursos multimedia fueron suficientes.
12. El uso de material multimedia ha sido útil.
13. Entiendo mejor los conceptos teóricos cuando se desarrollan en la pizarra
14. Valoro positivamente las prácticas con software para comprender los conceptos.

La encuesta se pasó a alumnos de tercer curso del grado de matemáticas y alumnos de primero de grado de ingenierías marina, náutica y transporte marítimo y radioelectrónica, que cursan asignaturas de física general. En total fueron 74 alumnos de ingenierías y 20 alumnos de matemáticas.

La mayoría de los alumnos, tanto de ingenierías como de matemáticas, valoraron positivamente las clases con software y el empleo de material multimedia. Sin embargo, uno de las conclusiones más interesantes en función de la opiniones de los alumnos es que todos creen necesario el uso de la pizarra tradicional pero manifiestan que las aplicaciones son necesarias para entender esos conceptos. En cuanto a titulaciones, las principales diferencias se encuentran en que los alumnos de ingenierías manifestaron tener dificultades a la hora de entender los desarrollos matemáticos y la nomenclatura no le resultó conocida. Los alumnos de matemáticas puntuaron con menor nota las posibles utilidades de los conceptos físicos. Sin embargo, sí valoran positivamente el emplear ejemplos físicos.

Algunas de las conclusiones generales son:

1. Al final de la experiencia los alumnos valoraron positivamente el uso del material para comprender mejor conceptos difíciles de aprender, como el de orientabilidad y variedad con pseudoborde.

2. Los alumnos demandan más dedicación de horas a los laboratorios, posiblemente porque despierta su interés y participación, pero al mismo tiempo creen necesario el desarrollo de la materia en pizarra por parte del profesor.

3. Los alumnos consideran muy positivas las aplicaciones a problemas físicos pero manifiestan poca satisfacción sobre los resultados obtenidos, lo que nos lleva a reforzar este punto en experiencias sucesivas.

4. La interacción entre profesores de distintas disciplinas que se ha desarrollado gracias a este proyecto nos ha aportado una visión más amplia de las necesidades y deficiencias de cada sistema de enseñanza individual.

Agradecimientos: Los autores agradecen la ayuda del grupo FQM201 de la junta de Andalucía, del proyecto MTM2009-11875 del Ministerio de Ciencia e Innovación y del proyecto de Innovación Docente PI1-12-005 de la Universidad de Cádiz.

REFERENCIAS

[1] M.L. Abell, J.P. Braselton. *Mathematica by example.* Academic Press, 2008.

[2] J. Bryant, *"Cylindrical Coordinates"* and *"Spherical Coordinates"* from the Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com).

[3] C. Glosser, *"Vector Field Acting on a Curve"* from the Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com/ VectorFieldActingOnACurve/).

[4] J. Hoste. *Mathematica DeMYSTiFied.* McGraw-Hill, 2008.

[5] R. Larson y R. Hostetler. *Cálculo y Geometría Analítica.* McGraw-Hill, 1989.

[6] K. Jänich. *Vector Analysis.* Springer-Verlag, 2001.

[7] S. Mangano. *Mathematica Cookbook.* O'Reilly Media, 2010.

[8] J. E. Marsden y A. J. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Addinson-Wesley Iberoamericana, 1991.

[9] J. Marsden y A. Weinstein. *Calculus.* Springer-Verlag, 1985.

[10] F. Mohamed, *"Exploring Spherical Coordinates"* and *"Exploring Cylindrical Coordinates"* from the Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com).

[11] J. R. Munkres. *Analysis on Manifolds.* Addinson-Wesley, USA, 1991.

[12] J.L. Romero, F. Benítez, C. Muriel, *"Análisis Vectorial"*. Dpto de Matemáticas. Universidad de Cádiz. 2004.

[13] J.L. Romero, F. Benítez, C. Muriel, *"Problemas Resueltos de Análisis Vectorial"*. Dpto de Matemáticas. Universidad de Cádiz. 2004.

[14] E. Schulz, *"Visualizing the Gradient Vector"* from the Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com).

[15] M. Spivak, *Cálculo en Variedades.* Reverté, 1970.

[16] J. Vidal y otros, *"Aplicaciones físico-matemáticas para la ensenanza de Análisis Vectorial en alumnos del primer curso de grados de Ciencias e Ingenierías"*. Noveno Simposio Iberoamericano en Educación, Cibernética e Informática: SIECI 2012.

[17] S. Wagon. *Mathematica in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation.* Springer, 2010.