

# Identificación de los parámetros de una fuente dipolar, usando mínimos cuadrados

María M. Morín Castillo<sup>1</sup>, José J. Oliveros Oliveros<sup>2</sup>, Eladio Flores Mena<sup>1</sup>,  
Moisés Gutiérrez Arias<sup>1</sup>, Gabriela Morales Timal<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias de la Electrónica

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Puebla, Puebla, CP. 72570, México.

[mmorin@ece.buap.mx](mailto:mmorin@ece.buap.mx)  
[oliveros@cfm.buap.mx](mailto:oliveros@cfm.buap.mx)  
[eflores@ece.buap.mx](mailto:eflores@ece.buap.mx)  
[jmgutierrez@ece.buap.mx](mailto:jmgutierrez@ece.buap.mx)  
[gmtimal@yahoo.com.mx](mailto:gmtimal@yahoo.com.mx)

## Resumen

Los problemas de identificación también conocidos como problemas inversos, se presentan en diferentes campos de la investigación y consisten en determinar el origen de cierto fenómeno a partir de las causas que este produce. En particular en la medicina es de gran interés determinar el daño cerebral en el interior del cerebro, a partir de mediciones del potencial sobre el cuero cabelludo. Esta medición es conocida como Electroencefalograma. En este trabajo, se utiliza un modelo de medio conductor para establecer correlaciones entre la fuente interior y el potencial medido a través del electroencefalograma.

A partir de esta relación, se plantean los problemas directo e inverso electroencefalográfico. El problema inverso presenta generalmente inestabilidad en el sentido de que dadas dos mediciones cercanas pueden identificar fuentes muy alejadas.

Además se propone una expresión matemática para encontrar el potencial producido por una fuente dipolar.

En la parte experimental se construyó un sistema físico, el cual consiste en colocar un dipolo eléctrico dentro de una esfera conductora, con lo cual se representa a la fuente dipolar dentro de la cabeza.

Esta permitirá tener los potenciales experimentales que se usarán para la recuperación de la fuente.

## 1. Introducción

La modelación matemática ha permitido resolver problemas de identificación muy importantes. Existen muchos problemas donde se quiere conocer la causa de cierto fenómeno, a partir de información parcial proporcionada. Un claro ejemplo de estos es en la geología, donde se busca la ubicación del epicentro de un sismo, a partir de la información obtenida por un

sismógrafo; el cual proporciona mediciones de las vibraciones en diferentes puntos. En la medicina se utilizan los problemas de identificación para diagnosticar posibles daños o anomalías en algunos órganos del cuerpo, a partir de algunos datos conocidos. Para solucionar este tipo de problemas, se utilizan las llamadas técnicas de diagnóstico, las cuales se clasifican de forma general en invasivas y no invasivas; las primeras consisten en tener un contacto directo con el órgano en cuestión como puede ser: la biopsia, la cirugía, etc.; las no invasivas consisten en determinar la condición del órgano por medio de información que puede ser observada desde el exterior del cuerpo como son: Electroencefalograma (EEG), electrocardiograma, etc.

Estas técnicas de diagnóstico han sido de gran ayuda en el tratamiento y seguimiento de muchos padecimientos. Actualmente se utilizan modelos matemáticos para representar este tipo de fenómenos (problemas inversos). Por lo general en estos planteamientos se presentan algunos de los siguientes inconvenientes: El problema no tiene solución, no tiene solución única o es inestable (esto es, dados dos datos cercanos, pueden tener soluciones alejadas).

Nuestro trabajo consiste en determinar la fuente que genera un exceso de actividad en el cerebro; estos son conocidos como focos epilépticos. Los focos epilépticos se pueden caracterizar matemáticamente por medio de dipolos. Así, a partir de un planteamiento matemático podemos definir los problemas; directo e inverso electroencefalográfico.

En particular en este trabajo se resuelve el problema inverso, el cual consiste en determinar, a partir de las mediciones del EEG la distribución espacial de los agregados de neuronas (fuentes) [4], [5], que generan dichas mediciones.

La mayor ventaja de las técnicas del EEG consiste en que se tiene acceso a esta información de manera muy

sencilla y económica, además es una técnica no invasiva.

## 2. Planteamiento del problema

Se quiere identificar una fuente producida por un aglomerado de neuronas, que en nuestro caso representa un exceso de actividad neuronal, por esta razón se representará por medio de un dipolo. Partiremos de un modelo utilizado en [4], [5], [7], [8].

En estos trabajos se supone a la cabeza humana ( $\Omega$ ), compuesta por dos zonas disjuntas, a saber:

1.  $\Omega_1$  Cerebro,
2.  $\Omega_2$  Restantes regiones que componen a la cabeza.

Suponemos que cada una de las componentes  $\Omega_i$  tiene una conductividad constante  $\sigma_i$ ,  $i=1, 2$ , con  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Mediante  $S_i$  se denotarán las superficies que componen las fronteras de las regiones  $\Omega_i$ ,  $i=1, 2$ :  $\partial\Omega_1 = S_1$ ,  $\partial\Omega_2 = S_1 \cup S_2$ , donde  $S_1$  representa la corteza cerebral y  $S_2$  al cuero cabelludo.

El potencial  $u$  producido en  $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$  ( $\bar{\Omega}_1$  denota la cerradura de  $\Omega_1$ ) por una fuente de corriente primaria  $J^p$  satisface el siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= f & \text{en } \Omega_1, \\ \Delta u_2 &= 0 & \text{en } \Omega_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } S_1,$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{en } S_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{en } S_2,$$

donde  $f = \text{div} \left( \frac{J^p}{\sigma_1} \right)$ ,  $u_i = u|_{\Omega_i}$ ,  $i=1, 2$ ,  $n_i$  es el vector normal unitario exterior a  $\Omega_i$  en  $S_i$ ,  $i=1, 2$ ,  $\frac{\partial u_i}{\partial n_j}$  representa la derivada normal de  $u_i$  en  $S_j$  con respecto al vector  $n_j$ . Las condiciones de contorno (2) corresponden a la continuidad del potencial eléctrico y de las componentes normales de la corriente en cada superficie  $S_j$ ,  $j=1, 2$ .

Al problema (1) con las condiciones (2) lo llamaremos **Problema de Contorno Electroencefalográfico (PCE)**.

## 3. Caso de una sola región conductora

En la sección anterior se representa a la cabeza por dos regiones conductoras, sin pérdida de generalidad, trabajaremos con una sola región, con objetivo de realizar la implementación del sistema y obtener los resultados experimentales.

Supondremos en lo que sigue que  $\Omega$  corresponde a una bola de radio uno centrada en el origen con conductividad constante  $\sigma$ . Consideremos el problema de contorno:

$$\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (4)$$

donde  $f$  representa a la fuente dipolar contenida en el interior del cerebro.

El trabajo se centra en la identificación de una fuente tipo dipolar, ya que estas representan a los focos epilépticos. Estos problemas son importantes en el área de la medicina, ya que un gran número de personas la padece. Esta enfermedad se caracteriza por ataques recurrentes que son la manifestación física de descargas eléctricas excesivas. Debido a que un foco epiléptico es un exceso de actividad eléctrica, cuya amplitud varía entre 15 y 100  $\mu V$ , con una duración de entre 50 y 80 ms; una forma de representarlo matemáticamente una densidad de corriente impresa en un solo punto  $p$  que tiene un momento dipolar  $\nu$ , que puede ser expresada como [10]:

$$f(P) = \frac{\nabla \cdot [(\rho(t) \nu(a, t) \delta(p-a))]}{\sigma} \quad (5)$$

donde  $\rho$  representa la densidad de corriente impresa concentrada en un punto  $a$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  es un vector con origen en el punto  $a$ , que denota la distancia entre cargas del dipolo,  $\delta$  es la función Delta de Dirac y  $\rho$  es la conductividad del medio.

Para expresar el potencial que satisface el problema (3)-(4), es necesario utilizar como núcleo una función de Green adecuada a la región en la cual se está trabajando.

Así el potencial que satisface el problema (3)-(4) queda expresado como:

$$u(p_0) = \int_{\Omega} G(p, p_0) f(p) dp, \quad (6)$$

donde  $u(p_0)$  es el potencial sobre la superficie debido a la fuente,  $p_0, p$  es el potencial sobre la superficie del punto de observación desde la superficie  $\partial\Omega$  y la ubicación de la fuente dentro del cerebro, respectivamente y  $f(p)$  representa a la fuente.

Las condiciones que debe cumplir la función de Green, para satisfacer el problema (6) son:

$$\begin{aligned} \Delta_p G(p, p_0) &= \delta(p - p_0) - \frac{1}{m(\Omega)} & p, p_0 \in \Omega, \\ \frac{\partial G}{\partial n_p}(p, p_0) &= 0 & p \in \Omega, p_0 \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $\delta(p - p_0)$  es la función Delta de Dirac y  $m(\Omega)$  denota el volumen de la región.

Como en nuestro caso la región es una esfera de radio uno, la función de Green está dada por

$$G(p, p_0) = \frac{1}{4\pi|p - p_0|} + \alpha R^2(p) + g_1(p, p_0) \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} p &= (x, y, z), p_0 = (x_0, y_0, z_0), \alpha = -\frac{1}{6m(\Omega)}, \\ |p - p_0| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \end{aligned}$$

$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$  y de acuerdo a las condiciones, la función  $g_1(p, p_0)$  debe satisfacer a su vez el problema de contorno siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta_p g_1(p, p_0) &= 0, & p, p_0 \in \Omega \\ \frac{\partial g_1}{\partial n_p}(p, p_0) &= -\alpha \frac{\partial R^2}{\partial n}(p) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|p - p_0|} \right), \\ & p_0 \in \partial\Omega, p \in \Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

En el caso en que  $f$  está dada por (5) con  $\rho(t) = q$ ,  $\nu = \vec{d}$  la expresión (6) toma la forma [2]:

$$u(p_0) = \left[ -\frac{q\vec{d}}{\sigma} \cdot \nabla_p G(p, p_0) \right]_{p=p_0} \quad (10)$$

Cuando  $p_0$  esta sobre el eje  $Z$ , es decir, cuando  $p_0 = (0, 0, z_0)$  se tiene que

$$G(p, p_0) = \frac{1}{4\pi|p - p_0|} + \frac{1}{z_0} \frac{1}{4\pi|p - p'_0|} - \frac{\omega(p, p_0)}{4\pi} - \frac{R^2(p)}{8\pi} + \tilde{C} \quad (11)$$

donde  $p'_0 = (0, 0, z_0)$ ,  $z'_0 = \frac{1}{z_0}$  y  $\tilde{C}$  es una constante que se elige de acuerdo a la condición:

$$\int_{\Omega} G(p, p_0) dp = 0, \quad (12)$$

y

$$\omega(p, p_0) = \ln(z'_0 - z + |p - p'_0|).$$

Nótese que cuando  $z_0 = 1$ , entonces  $p_0$  corresponde con el polo norte de la esfera. Tendremos entonces el potencial en ese punto. Para el caso en que  $p_0$  no coincide con el polo norte, podemos hacer el cambio de coordenadas para colocar el eje  $Z$  en la dirección del punto  $p_0$  y que este coincida con el polo norte.

Así tendremos el potencial teórico en cada punto.

#### 4. Problema de identificación

El problema inverso electroencefalográfico consiste en determinar la fuente a partir los potenciales medidos sobre el cuero cabelludo, en este caso, ya que se estudia una fuente bioeléctrica tipo dipolar, se deben determinar los parámetros que caracterizan a dicha fuente.

Una forma de resolver el problema es a través del método de mínimos cuadrados. Este método se basa en la comparación entre los datos observados  $\nu(x_k)$  y los datos teóricos  $u(x_k)$ , generados por la fuente dipolar, de la siguiente forma.

$$J = \arg \min_p \left\{ \sum_{k=1}^n [\nu(x_k) - u(x_k)]^2 \right\},$$

donde,

$J$  Es una función de optimización.

$\nu(x_k)$  Son los potenciales medidos sobre la superficie en los  $k$  puntos diferentes.

$u(x_k) = -\frac{qd}{\sigma} \cdot \nabla_y G(x_k, y_k)$  Son los potenciales teóricos obtenidos para cada uno de los  $k$  puntos.

$qd$  Son los parámetros del momento dipolar.

Como ya se sabe, el problema inverso Electroencefalográfico es mal planteado, debido a que presenta inestabilidad en la solución ante variaciones de los datos de entrada, por tal motivo se utiliza una variación del método de mínimos cuadrados para proporcionar estabilidad al algoritmo, el cual se conoce como método de regularización de Tijonov. Este es una herramienta mediante la cual se pueden hallar soluciones aproximadas que dependen del parámetro de regularización, garantizando que cuando el error tiende a cero la solución aproximada, converge a la única solución de la ecuación de datos sin error.

De acuerdo a este método, la función de optimización tiene la forma:

$$J^\alpha = \arg \min_p \left\{ \sum_{k=1}^n \|v(x_k) - \omega_k\|^2 + \alpha \|p\|^2 \right\}$$

$$\omega_k = \left( -\frac{qd}{\sigma} \cdot \nabla_y G(x_k, y_k) \right)$$

donde  $\alpha > 0$  es el parámetro de regularización de Tijonov, cuya función es proporcionar estabilidad al algoritmo. Por tal motivo, este se debe elegir apropiadamente, una forma es por medio del principio de discrepancia de Morozov

$$\|u(x^{\alpha(\delta)}) - v(x^\alpha)\|^2 = \delta^2$$

donde  $\delta$  es el error.

Con base en los conceptos aquí descritos, se desarrolla un algoritmo estable que nos permita identificar la fuente bioeléctrica dipolar.

Para nuestro problema, el vector de los parámetros estimados para el momento dipolar, con base en el funcional anterior, se obtiene a partir de:

$$qd = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\nabla G(p, p)}{\nabla} G(p, p)^T + \alpha I \right] \quad (13)$$

## 5. Representación física de una fuente dipolar

Para obtener los valores experimentales, se implemento un sistema que representa a la fuente dipolar inmersa en un medio conductor. El dipolo eléctrico se emula con dos cargas de igual magnitud pero de signo contrario, con una separación entre ellas; para cargar el dipolo se construyen los generadores de Van de Graaff. (Ver Figura 1). El principio de funcionamiento de esta máquina se basa

en el frotamiento por rotación de dos materiales distintos para generar carga eléctrica, la cual es transportada por una banda o un domo a una esfera metálica hueca donde la carga es acumulada.

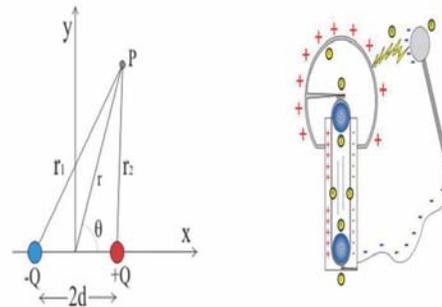


Figura 1. Izquierda: Representación de un dipolo eléctrico; Derecha: Generador de Vann de Graff

Para determinar el potencial que genera una fuente tipo dipolar, se introducen dos esferas con carga similar en un medio conductor artificial, cuyas características son similares al modelo analizado anteriormente. Los potenciales generados por esta fuente se miden por medio de electrodos que se colocan en el exterior de la superficie que represente el cuero cabelludo. Los electrodos fueron distribuidos como se muestra en la figura (2).

Para poder determinar de forma exacta la posición del dipolo dentro la región, se construyo una estructura de forma esférica, la cual se acerca un poco más a la geometría real de la cabeza.



Figura 2. Representación del sistema por una esfera conductora.

Para resolver el problema directo, se implemento un algoritmo en MATLAB, en el que se uso la función de Green construida y la expresión [10], donde se usa utiliza un arreglo de electrodos, con un momento dipolar determinado. En la figura (3) se muestran algunos valores obtenidos para el potencial en algunos de los puntos considerados, lo cual muestra la sensibilidad a los errores de medición a los cuales está sujeto el problema, la razón de estos errores, se debe a diversos factores; como una desviación en la ubicación de los electrodos o del sistema de referencia, el ruido presente en el ambiente, etc.; esta es una de las razones por la cual es necesario

implementar el algoritmo considerando una técnica de regularización.

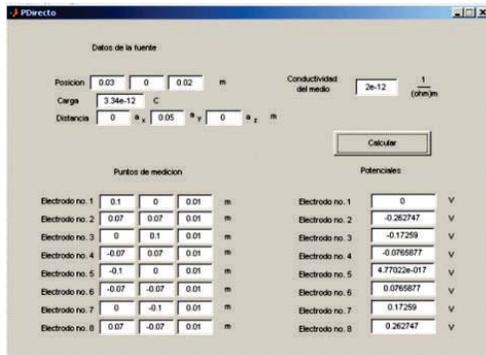


Figura 3. Potencial medido en algunos puntos predeterminados.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se plantea la solución del problema de identificación de una fuente bioeléctrica tipo dipolo, en forma teórica. Para este problema se ha realizado un modelo de medio conductor en el que la cabeza se considera un medio homogéneo con conductividad constante. Para identificar el momento dipolar se utiliza el funcional de mínimos cuadrados el cual se construye con las mediciones teóricas y las experimentales. El potencial teórico producido por una fuente dipolar (fija) se expresa por medio de la función de Green de este problema la cual se da de forma explícita. Al disponer del sistema físico, es posible realizar mediciones del potencial, producido por esa fuente para obtener los datos experimentales y poder aplicar el funcional de mínimos cuadrados. Debido a que el problema es mal planteado en el sentido de que pequeños errores en los datos pueden producir variaciones sustanciales en la localización del momento dipolar debe aplicarse un método de regularización como el de Tijonov para obtener de forma estable el momento dipolar.

## 7. Referencias

1. Amir A., 1994. Uniqueness of the generators of brain evoked potential maps. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. Vol. 41, pp. 1-11.
2. Fraguela A. Morín M., Oliveros J., 1998. Planteamiento del Problema Inverso de Localización de los Parámetros de una Fuente de Corriente Neuronal en Forma de Dipolo. Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 25, pp. 41-55. Sociedad Matemática Mexicana.
3. Fraguela A., Oliveros J., Grebennikov A., 2001. Planteamiento Operacional y Análisis del Problema Inverso Electroencefalográfico. Revista Mexicana de Física, Vol. 47, N. 2, pp. 162-174.

4. Fraguela A., Morín M., Oliveros J., 2007. Inverse Electroencephalography for volumetric sources. Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 78, pp. 481-492.
5. Fraguela A., Oliveros J., Morín M., Cervantes L., 2005. Inverse Electroencephalography for Cortical Sources. Applied Numerical Mathematics, Vol. 55, pp.191-203.
6. Kirsch A., 1996. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer Verlag.
7. Morín M., Oliveros J., Fraguela A., 2008. Planteamiento Operacional del Problema Directo e Inverso Electroencefalográfico. CИСCI 2008, Vol. 1, pp. 38-42.
8. Morín M., Oliveros J., Fraguela A., 2009. Validación numérica y experimental de un algoritmo de identificación de fuentes bioeléctricas tipo dipolo. CИСCI 2009, Vol. 1, pp. 35-40.
9. Pascual-Marqui R., 1999. Review of Methods for Solving the EEG Inverse Problems. International Journal of Bioelectromagnetism. N. 1, Vol. 1.
10. Sarvas J., 1987. Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic inverse Problem. Phys. Med. Biol., Vol. 32, No. 1, pp. 11-22.
11. Sobolev S. L., 1964. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Addison-Wesley Publishing Company.