

# Optimización Dinámica del Enriquecimiento de Dióxido de Carbono para el Cultivo de Tomate en un Microclima

José E. Moisés GUTIÉRREZ ARIAS

Nubia Iliá PONCE DE LEÓN PUIG

José E. FLORES MENA

Montserrat MORÍN CASTILLO

Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 14 Sur Avenida San Claudio, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Tel. (222) 229-55-00 ext. 7405. Puebla, Pue., México

## RESUMEN

A partir del modelo dinámico del cultivo de tomate y del modelo dinámico del microclima se puede optimizar el ajuste de dióxido de carbono requerido por el cultivo, considerando un modelo de cuatro estados: la biomasa no estructural (nutrientes), la biomasa estructural de los frutos y de las hojas, y la concentración de dióxido de carbono. Se aplica la teoría de control óptimo y se selecciona un indicador de desempeño con la finalidad de mejorar el rendimiento y la calidad del cultivo, reduciendo costos por consumo de energía y aumentando la producción final, regulando la concentración de  $\text{CO}_2$ . El sistema se resuelve en MatLab y se simula en un periodo de dos semanas, con una entrada de control rampa y con la entrada de control deducida a partir de la teoría del control óptimo para comparar los resultados.

**Palabras clave:** Microclima, dióxido de carbono, biomasa no estructural, biomasa estructural de las hojas, biomasa estructural de los frutos, control óptimo, indicador de desempeño, espacio de estados.

## 1. INTRODUCCIÓN

De todas las actividades para la producción agrícola, la industria de los invernaderos es la que más crecimiento ha tenido. Los invernaderos son estructuras que separan al cultivo del ambiente exterior, esto permite la producción de cultivos en diferentes áreas. Los invernaderos optimizan la producción de cultivos, ya que mejoran las condiciones ambientales necesarias para incrementar su producción y calidad. Cuando en un invernadero se pueden controlar las variables que mejoran las condiciones que el cultivo necesita, se dice que es un *microclima*.

Se han hecho muchos estudios para desarrollar sistemas de control de clima en invernaderos, en particular se han propuesto diferentes métodos de control óptimo [1,2,7,8], estos métodos aplicados a sistemas no lineales son muy complejos, pero con algunas simplificaciones se puede reformular el problema general y obtener soluciones para problemas subóptimos [3,4,7].

Las estrategias óptimas para el enriquecimiento dinámico de  $\text{CO}_2$  pueden deducirse experimental o analíticamente, pero la experimentación no es capaz de producir una estrategia óptima que tome en cuenta todo el conjunto de condiciones ambientales, mientras que el método de análisis proporciona un marco matemático que es válido para todos los conjuntos y variables que involucran todas las condiciones ambientales. El enriquecimiento de  $\text{CO}_2$  en los microclimas se hace con la finalidad de aumentar el rendimiento del cultivo, dicho enriquecimiento resulta positivo para el aumento de la fotosíntesis neta de las plantas, que se refleja en el incremento del peso seco, en la altura de la planta y en el número de hojas y ramas [5]. Otra ventaja es que provoca cambios físico-químicos en el crecimiento del cultivo como la firmeza o el color en diferentes etapas de madurez [4]. En este desarrollo la concentración óptima de  $\text{CO}_2$  se expresa como una función algebraica de la radiación, la velocidad del viento, y el ángulo de apertura de las ventilas, de esta forma se obtiene un valor causioptimal utilizando las variables medidas por los controladores ambientales del microclima. Se utiliza un modelo conjunto del microclima y del cultivo para tener en cuenta la dependencia de las variables del cultivo respecto a las variables involucradas con el microclima.

Este trabajo tiene como objetivo principal contribuir con el problema de control óptimo. Se trabajará con el cultivo de tomate ya que es uno de los productos agrícolas que más se producen en nuestro país. Teniendo control sobre el dióxido de carbono se tiene una ventaja extra en cuanto a capacidad de producción anual se refiere, el control óptimo sobre el dióxido de carbono busca maximizar la producción de frutos al tiempo que se minimizan costos. Se parte del modelo dinámico conjunto microclima-cultivo tomando en cuenta las variables del peso seco de la planta, peso seco del fruto, disponibilidad de nutrientes y la cantidad de dióxido de carbono.

## 2. FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA DEL CONTROL ÓPTIMO

El control óptimo del sistema del microclima, debe estar basado en tres elementos: el modelo dinámico del

sistema, una función de desempeño y las restricciones físicas del sistema.

En notación matricial la ecuación de estados del sistema se representa como sigue:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t). \quad (1)$$

Donde  $x(t)$  es el vector de estados y  $u(t)$  es la señal de control. Se requiere de un criterio para evaluar el desempeño del sistema, normalmente el funcional de desempeño está definido como:

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt, \quad (2)$$

donde  $t_0$  y  $t_f$  son el tiempo inicial y tiempo final,  $\phi$  y  $L$  son funciones escalares.  $t_f$  puede ser especificado o libre. Comenzando en el estado inicial  $x(t_0) = x_0$  y aplicando la señal de control  $u(t)$  para  $t \in [t_0, t_f]$  se logra que el sistema siga alguna trayectoria de estados. El problema fundamental del control óptimo se reduce a determinar un control admisible  $u^*$  el cual provoque que la Ec. (1) siga una trayectoria admisible  $x^*$  que minimiza la medida de desempeño mostrada en la Ec. (2). Entonces,  $u^*$  es llamado control óptimo y  $x^*$  es una trayectoria óptima.

### Condiciones Necesarias para una Solución Estacionaria.

Se añaden las restricciones Ec. (1) al funcional de desempeño Ec. (2) con un vector de multiplicadores de Lagrange variantes en el tiempo (vector de variables adjuntas)  $\Psi(t)$ , y se define la función escalar Hamiltoniana.

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \Psi(t), t) &= \\ &= L(x(t), u(t), t) + \Psi^T(t)f(x(t), u(t), t). \end{aligned} \quad (3)$$

Se considera una variación infinitesimal en  $u(t)$  denominada como  $\delta u(t)$ , dicha variación produce un cambio en la función de desempeño. Si  $x(t_0)$  está especificada, entonces  $\delta x(t_0)$  también lo está.

El vector de las variables adjuntas  $\Psi(t)$  se elige haciendo:

$$\dot{\Psi}^T = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} - \Psi^T \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (4)$$

Con las condiciones de frontera:  $\Psi^T(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_f)$ . Para una solución estacionaria se requiere que la función de desempeño con una variación arbitraria sea igual a cero,  $\delta J = 0$ . Esto solo se cumple si se cumple la ecuación de *condición estacionaria*:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \Psi^T \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad (5)$$

Para hallar la función vector de control  $u(t)$  que produce un valor estacionario de la función de desempeño debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ \dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial H^T}{\partial x}, \end{cases} \quad (6)$$

Este es un *problema con valores en la frontera de dos puntos*. Es importante notar que las ecuaciones que describen a los estados  $x(t)$  y estados adjuntos  $\Psi(t)$  en la Ec. (6) están acopladas, dado que  $u(t)$  depende de  $\Psi(t)$  a través de la condición estacionaria y los estados adjuntos dependen de  $x(t)$  y  $u(t)$ . Note también que la primera ecuación involucra las condiciones iniciales  $t = t_0$  y la segunda involucra las condiciones finales  $t = t_f$ .

### 3. MODELO MATEMÁTICO DEL CULTIVO

El modelo en el espacio de estados del tomate se formula a continuación de una manera genérica. Las ecuaciones se obtuvieron a partir del estudio del modelo que propone Van Straten [7]. Este modelo consta de tres estados principales relativos al cultivo:

- Balance de Biomasa de Nutrientes.
- Balance de Biomasa de Hojas.
- Balance de Biomasa de Frutos.

Los balances de masa básicos pueden expresarse de la siguiente manera

- Nutrientes:

$$\frac{dW_B}{dt} = P - G_V - \theta_V G_V - G_F - \theta_F G_F - R_{B,V} - R_{B,F}, \quad (7)$$

- Hojas:

$$\frac{dW_V}{dt} = G_V - R_{V,V} - H_L, \quad (8)$$

- Frutos:

$$\frac{dW_F}{dt} = G_F - R_{F,F} - H_F, \quad (9)$$

donde:

Producción de nutrientes por fotosíntesis ( $P$ ).

Conversión de nutrientes a biomasa vegetal por crecimiento ( $G_V$ ).

Uso de nutrientes como energía para propiciar el crecimiento vegetal ( $\theta_V G_V$ ).

Conversión de nutrientes en frutos por crecimiento ( $G_F$ ).

Uso de nutrientes como energía para propiciar el crecimiento del fruto ( $\theta_F G_F$ ).

Consumo de nutrientes para el mantenimiento de las partes vegetales ( $R_{B,V}$ ).

Consumo de nutrientes para el mantenimiento de los frutos ( $R_{B,F}$ ).

Uso de la biomasa para mantenimiento cuando hay una carencia de nutrientes ( $R_{V,V}$ ).

Tasa de deshoje ( $H_L$ ).

Uso de la biomasa para mantenimiento cuando hay una carencia de nutrientes ( $R_{F,F}$ ).

Tasa de cosecha ( $H_F$ ).

### Balance de Biomasa de Nutrientes.

Los nutrientes son producidos por la fotosíntesis. La tasa global de fotosíntesis en el follaje expresada en peso seco por unidad de área es  $P$ . Las hojas y frutos crecen a partir de una demanda de nutrientes, misma que será satisfecha mientras existan nutrientes suficientes. Se denota como  $W_B$  el total de nutrientes en el follaje de la planta, expresado como peso seco por unidad de área, entonces se tiene la siguiente ecuación de balance de masa:

$$\frac{dW_B}{dt} = P - h\{\cdot\} \left( \frac{(1+\theta_V)}{z} G_L^{dem} + (1 + \theta_F) G_F^{dem} \right) - h\{\cdot\} \left( \frac{R_L}{z} + R_F \right). \quad (10)$$

**Tasa global de nutrientes producidos por fotosíntesis:** Se introduce el factor  $f_m\{\cdot\}$  como un *factor de madurez*. Este es cercano a cero cuando la planta es joven (la fotosíntesis es proporcional al área de hojas por unidad de área en el microclima). Y se aproxima a uno cuando la planta ha madurado (la fotosíntesis es prácticamente independiente).

$$P = P^{max} \left( \frac{I^{PAR}}{I^{PAR} + K_I} \right) \left( \frac{C_{CO_2}}{C_{CO_2} + K_C} \right) f_m\{\cdot\}.$$

Los términos de esta ecuación se explican a continuación:

- \* Tasa fotosintética máxima del follaje:

$$P^{max} \quad (kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1}).$$

- \* Intensidad de luz a nivel de la cosecha (proporcional a la radiación global):

$$I^{PAR} = (Wm^{-2}[gh])^2.$$

- \* Intensidad de luz PAR (Radiación Activa Fotosintética) a media saturación:

$$K_I (W[PAR]m^{-2}).$$

- \* Concentración de  $CO_2$  a media saturación:

$$K_C (W[CO_2]m^{-3}).$$

- \* Concentración de  $CO_2$ :  $C_{CO_2}$  ( $kgm^{-3}$ ).

**Sustracción de nutrientes para el crecimiento de la planta:** Para el término

$$h\{\cdot\} \left( \frac{(1+\theta_V)}{z} G_L^{dem} + (1 + \theta_F) G_F^{dem} \right),$$

se da el significado de cada elemento:

- \* Parámetro variable en función de la abundancia de nutrientes:  $h\{\cdot\}$ ,

los valores que este parámetro puede tomar son dos:  $h\{\cdot\} = 0$ , cuando hay una carencia de nutrientes y  $h\{\cdot\} = 1$ , para abundancia de los mismos.

- \* Cantidad de nutrientes requeridos por la parte vegetal para producir 1 unidad estructural:  $\theta_V$ ,
- \* Cantidad de nutrientes requeridos por los frutos para producir 1 unidad estructural:  $\theta_F$ ,
- \* Modelo de la parte vegetal:

$$z = \frac{W_L}{W_L + W_{stem} + W_{roots}},$$

donde:

$W_L$  ( $kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1}$ ), peso seco de las hojas.

$W_{stem}$  ( $kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1}$ ), peso seco de los tallos.

$W_{roots}$  ( $kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1}$ ), peso seco de las raíces.

Para las demandas de crecimiento de las hojas y de los frutos se toma en cuenta el hecho de que en las etapas tempranas del brote de frutos, la distribución del tamaño tiende hacia frutos pequeños y la tasa de crecimiento relativo comienza a crecer. También se asume que el crecimiento de los frutos es dependiente de la temperatura, modelada con una relación  $Q_{10G}$ . Así se tiene:

- \* Demanda de crecimiento de las hojas:

$$G_L^{dem} = f_{L/F}(T) k_{GF}^{ref} f_{TG}(T) f_D\{\cdot\} W_L,$$

- \* Demanda de crecimiento del fruto:

$$G_F^{dem} = k_{GF}^{ref} f_{TG}(T) f_D\{\cdot\} W_F,$$

donde:

$f_{L/F}(T) = f_{L/F}^{ref} e^{v_2(T - T_{L/F}^{ref})}$ , es la tasa que expresa si el factor de crecimiento de las hojas es mayor o menor al de los frutos.

$f_{L/F}^{ref}$ , es una constante adimensional que expresa cuán grande es la demanda de crecimiento de las hojas comparada con la de los frutos a la temperatura pivotal.  $T_{L/F}^{ref}$ , es la temperatura pivotal.

$v_2$ , es un parámetro de particionamiento fruto-hoja.

$k_{GF}^{ref}$  ( $s^{-1}$ ), es el coeficiente de tasa de crecimiento del fruto a la temperatura de referencia.

$f_{TG}(T) = Q_{10G}^{\frac{T - T_G^{ref}}{10}}$ , es el factor utilizado para expresar el crecimiento de los frutos, es dependiente de la temperatura.

$T$  ( $^{\circ}C$ ), es la temperatura a nivel del cultivo.

$T_G^{ref}$  ( $^{\circ}C$ ), es la temperatura de referencia para crecimiento.

$f_D\{\cdot\} = \frac{c_{f1} - c_{f2}D}{c_{f1} - c_{f2}}$ , es el factor de corrección en la tasa de crecimiento.  $D$  es la etapa de desarrollo de la planta y  $f_D = 1$  cuando  $D = 1$ , es decir la planta esté madura.

$W_L$  ( $kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1}$ ), biomasa estructural de las hojas.

$W_F$  ( $kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1}$ ), biomasa estructural del fruto.

**Sustracción de nutrientes para respiración de la planta:** La respiración se dará existan o no nutrientes disponibles.

$$h\{\cdot\} \left( \frac{R_L}{z} + R_F \right),$$

se da el significado de cada elemento:

- \* Demanda de respiración de mantenimiento de las hojas:

$R_L = k_{RL}^{ref} f_{TR}(T)W_L$  ( $s^{-1}Kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-2}$ ) $^{\circ}C$  que depende de la tasa de respiración de las hojas a la temperatura de referencia, de la temperatura a nivel del cultivo, de la función de la temperatura como una relación  $Q_{10G}$  y de la biomasa estructural de las hojas.

- \* Demanda de respiración de mantenimiento del fruto:

$R_F = k_{RF}^{ref} f_{TR}(T)W_F$  ( $s^{-1}Kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-2}$ ) $^{\circ}C$  que depende de la tasa de respiración de las hojas a la temperatura de referencia, de la temperatura a nivel del cultivo, de la función de la temperatura como una relación  $Q_{10G}$  y de la biomasa estructural de los frutos. Finalmente, la ecuación de balance de biomasa de nutrientes. Ec. (10), puede tomar 2 valores dependiendo de la abundancia de nutrientes  $h\{\cdot\}$ :

$$\frac{dW_B}{dt} = \begin{cases} P - \frac{(1+\theta_V)}{z} G_L^{dem} - (1 + \theta_F) G_F^{dem} - \\ - \frac{R_L}{z} - R_F, \\ P, \end{cases} \quad (11)$$

donde la primera expresión se toma cuando  $h\{\cdot\} = 1$  y la segunda cuando  $h\{\cdot\} = 0$ .

#### Balance de Biomasa de Hojas.

El crecimiento de las hojas es igual a la cantidad de nutrientes convertida a biomasa estructural de hojas en el follaje de la planta y está dado por  $h\{\cdot\}G_L^{dem}$ . El incremento en la biomasa de las hojas siempre va acompañado de crecimiento en el tallo y hojas aunque estos no estén incluidos en el modelo. Si hay una carencia de nutrientes, el crecimiento se detiene, normalmente los nutrientes se utilizan para el mantenimiento, pero en caso de escasez de estos, el mantenimiento en el modelo se emplea en las partes estructurales de la planta (hojas y frutos). Así, el balance de biomasa de hojas por unidad de área será:

$$\frac{dW_L}{dt} = h\{\cdot\}G_L^{dem} - (1 - h\{\cdot\})R_L - H_L, \quad (12)$$

A continuación se describen los términos:

- \* Tasa de deshoje natural de la planta:

$$H_L = k_{HL}W_L, \quad (kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1})$$

donde:  $k_{HL} = c_{yL}k_H$  ( $s^{-1}$ ), es el coeficiente variable en función de la etapa de desarrollo de la planta  $D$ . Por lo tanto, dependiendo de la abundancia de nutrientes  $h\{\cdot\}$ , la ecuación (12) de balance de biomasa de las hojas puede tomar dos valores:

$$\frac{dW_L}{dt} = \begin{cases} G_L^{dem} - H_L, & \text{si } h\{\cdot\} = 1, \\ -R_L - H_L, & \text{si } h\{\cdot\} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

#### Balance de Biomasa de Frutos.

De manera similar al caso de la biomasa de las hojas, el crecimiento de los frutos en la planta dado a partir de los nutrientes asimilados está dado por  $h\{\cdot\}G_F^{dem}$ . El balance de biomasa de los frutos es:

$$\frac{dW_F}{dt} = h\{\cdot\}G_F^{dem} - (1 - h\{\cdot\})R_F - H_F, \quad (14)$$

A continuación se describen los términos:

- \* Tasa de cosecha de la planta:

$$H_F = k_{HF}W_F \quad (kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1}),$$

donde:

$k_{HF} = c_{yF}k_H$  ( $s^{-1}$ ), es el coeficiente variable en función de la etapa de desarrollo de la planta  $D$ . Finalmente la Ec. (14) de balance de biomasa de frutos puede tomar dos valores distintos, en función del valor del parámetro  $h\{\cdot\}$  de abundancia de nutrientes:

$$\frac{dW_F}{dt} = \begin{cases} G_F^{dem} - H_F, & \text{si } h\{\cdot\} = 1, \\ -R_F - H_F, & \text{si } h\{\cdot\} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

## 4. MODELO MATEMÁTICO DEL MICROCLIMA

#### Balance de Energía del Dióxido de Carbono al Interior del Invernadero.

El balance de energía del dióxido de carbono dentro del invernadero se obtuvo a partir del estudio de los resultados de Van Straten [7] y está dado por la ecuación:

$$\frac{V_g}{A_g} \frac{dC_{CO_2}}{dt} = -\eta_{CO_2/dw}P + \eta_{CO_2/dw}R - \varphi_{CO_2,g-o}^{vent} + u_{CO_2}, \quad (16)$$

de manera similar, se describe cada término:

- \* Cantidad de dióxido de carbono tomado del aire del invernadero por la fotosíntesis de las plantas:

$$\eta_{CO_2/dw}P,$$

- \* Cantidad de dióxido de carbono regresado al aire del invernadero por la respiración de las plantas:

$$\eta_{CO_2/dw} R,$$

donde:  $\eta_{CO_2/dw}$  ( $kg[CO_2]kg^{-1}[dw]$ ), es la cantidad de dióxido de carbono necesario para formar una unidad de biomasa.

El término  $\frac{V_g}{A_g}$  es la razón del volumen del invernadero por unidad de área del suelo del invernadero.

$R = h\{\cdot\} \left( \frac{\theta_V}{z} G_L^{dem} + \theta_F G_F^{dem} \right) + \frac{R_L}{z} + R_F$  ( $kg[dw]m^{-2}[gh]s^{-1}$ ), es la cantidad total respirada por la planta por unidad de tiempo.

- \* Pérdida de masa de dióxido de carbono por ventilación:

$$\varphi_{CO_2,g-o}^{vent} = u_V (C_{CO_2} - C_{CO_2-o}),$$

donde:

$$u_V = \left( \frac{p_{V1} u_V^{A_{plsd}}}{1+p_{V2} u_V^{A_{plsd}}} + p_{V3} + p_{V4} u_V^{A_{pwsd}} \right) v + p_{V5}$$

( $m^3[air]m^{-2}[gh]s^{-1}$ ), es la tasa de flujo de ventilación volumétrica por unidad de área del invernadero.  $p_{Vj}$ ,  $j = (1, 2, 3, 4, 5)$  son parámetros y  $v$  es la velocidad del viento.

Los coeficientes  $u_V^{A_{pwsd}}$  y  $u_V^{A_{plsd}}$  corresponden a la apertura de ventanas de cara al viento y a su lado opuesto correspondientemente.

$C_{CO_2}$  ( $kgm^{-3}$ ), es la concentración de dióxido de carbono al interior del invernadero.

$C_{CO_2,o}$  ( $kgm^{-3}$ ), es la concentración de dióxido de carbono al exterior del invernadero.

- \* Suministro de dióxido de carbono:

$$u_{CO_2} = u_{CO_2}^{V_p} \varphi_{CO_2,in-g}^{max}$$

donde:

$u_{CO_2}^{V_p}$ , es la apertura de válvula de suministro.

$\varphi_{CO_2,in-g}^{max}$  ( $kg[CO_2]m^{-2}[gh]s^{-1}$ ), es la máxima tasa de flujo de dióxido de carbono.

En este modelo descrito para el microclima, la posición de la válvula de suministro de dióxido de carbono se maneja como la entrada de control. Por ello, esta se refiere directamente al actuador presente de manera física en el microclima.

## 5. SÍNTESIS DEL CONTROL ÓPTIMO

Consideramos el sistema formado por las ecuaciones de estado (11), (13), (15) y (16); las primeras relativas al cultivo suponiendo que hay abundancia de nutrientes ( $h\{\cdot\}$ ) y la cuarta ecuación relativa al microclima (concentración de  $CO_2$ ). Los parámetros en dichas ecuaciones se han sustituido de acuerdo a la tabla 1 y así se obtiene el siguiente sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} \dot{W}_L = 2,2996 \times 10^{-6} W_L, \\ \dot{W}_F = 4,3925 \times 10^{-6} W_F, \\ \dot{W}_B = P - 5,39 \times 10^{-6} W_L - 5,92 \times 10^{-6} W_F, \\ 3\dot{C}_{CO_2} = 1,0266(R - P) + 0,155 \times 10^{-10} u_{CO_2}^{V_p}, \end{cases} \quad (17)$$

$P$  y  $R$  tienen la siguiente forma:

$$P = \frac{3,7192 \times 10^{-11} W_L^{2,511}}{1,6353 \times 10^{-9} + 4,0439 \times 10^{-5} W_L^{2,511}},$$

$$R = 1,5942 \times 10^{-6} W_F + 0,4856 \times 10^{-6} W_L + 1,668 \times 10^{-7}.$$

Consideramos el siguiente índice de desempeño:

$$J = \frac{1}{2} \left[ W_L^2(t_f) + W_F^2(t_f) + W_B^2(t_f) + C_{CO_2}^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [W_L^2 + W_F^2 + W_B^2 + C_{CO_2}^2 + (u_{CO_2}^{V_p})^2] dt \right], \quad (18)$$

El primer término del indicador de desempeño involucra las tres primeras variables en el momento final relativas a la producción final y a los nutrientes, la integral contiene la entrada de control para evitar cambios ante el riesgo de entradas muy grandes del control. El planteamiento es minimizar el índice de desempeño Ec. (18), sujeto al sistema de ecuaciones (17).

### Descripción del Método de Solución.

La función escalar Hamiltoniana, se obtiene al considerar la relación, Ec. (3), en concordancia con el índice de desempeño, Ec. (18).

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \Psi, t) &= \\ &= \frac{1}{2} [W_L^2(t) + W_F^2(t) + W_B^2(t) + C_{CO_2}^2(t) + (u_{CO_2}^{V_p})^2(t)] + \\ &+ 2,2996 \times 10^{-6} W_L(t) \Psi_1(t) + 4,3925 \times 10^{-6} W_F(t) \Psi_2(t) + \\ &+ [P - 5,39 \times 10^{-6} W_L(t) - 5,92 \times 10^{-6} W_F(t)] \Psi_3(t) + \\ &+ \frac{1}{3} [1,0266(R - P) + 0,1554 \times 10^{-10} u_{CO_2}^{V_p}] \Psi_4(t). \end{aligned} \quad (19)$$

A partir de la relación, Ec. (4) se obtiene el sistema de las variables adjuntas, el cual tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1 = W_L + 2,2996 \times 10^{-6} \Psi_1 + \frac{\partial P}{\partial W_L} \Psi_3 - \\ \quad - 5,39 \times 10^{-6} \Psi_3 + \frac{1}{3} \frac{\partial (R-P)}{\partial W_L} \Psi_4 (1,0266) \\ \dot{\Psi}_2 = W_F + 4,3925 \times 10^{-6} \Psi_2 - \\ \quad - 5,92 \times 10^{-6} \Psi_3 + \frac{1}{3} \frac{\partial R}{\partial W_F} \Psi_4 (1,0266), \\ \dot{\Psi}_3 = W_B, \\ \dot{\Psi}_4 = C_{CO_2}, \end{cases} \quad (20)$$

La condición estacionaria (5) proporciona la siguiente forma del control, el cuál depende del cuarto estado adjunto:

$$u_{CO_2}^{V_p} = -\frac{1}{3} 0,1554 \times 10^{-10} \Psi_4(t). \quad (21)$$

El sistema (17) tiene condiciones iniciales y el sistema (20) tiene condiciones finales. Los sistemas están acoplados, pues se ha sustituido la forma del control (21). Para resolver el sistema completo, como un sistema con condiciones iniciales, las ecuaciones adjuntas se consideran en el tiempo inverso, posteriormente, el

**Tabla 1:** Parámetros físicos.

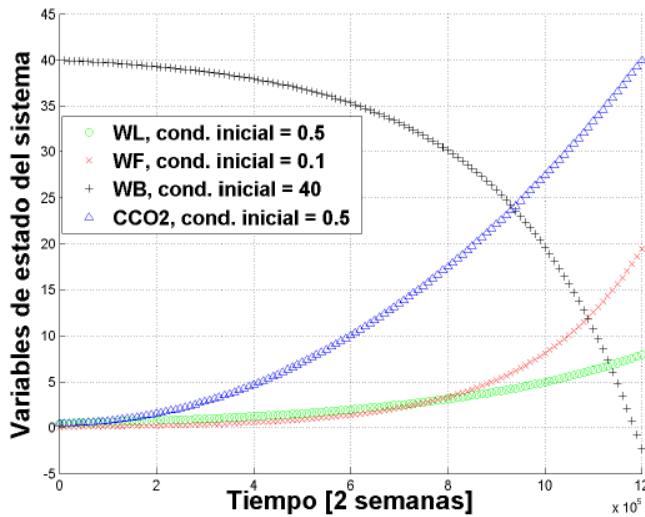
Variable	Valor	Descripción
$z$	0,6081	Fracción de hojas del total de la masa vegetativa
$\theta_F$	0,2	Factor de asimilados para el incremento de frutos por unidad
$\theta_V$	0,23	Factor de asimilados para el incremento de la parte vegetal por unidad
$p_m$	$1,8 \times 10^{-2}$	Parámetro en el factor de maduración, [ $kg\ m^{-2}$ ]
$m$	2,511	Parámetro en el factor de maduración
$p^{max}$	$2,2 \times 10^{-6}$	Tasa de fotosíntesis de la cubierta bruta máxima, [ $kg\ m^{-2}\ s^{-1}$ ]
$K_1$	577	Constante Monod para PAR, [ $W\ m^{-2}$ ]
$K_c$	0.211	Constante Monod para $CO_2$ , [ $kg\ m^{-3}$ ]
$f_{PAR/I}$	0.475	Fracción PAR de radiación solar
$\tau_r$	0.7	Transmitancia de la cubierta
$k_{GF}^{ref}$	$3,8 \times 10^{-6}$	Coefficiente de referencia de la tasa de crecimiento de la fruta, [ $s^{-1}$ ]
$T_{GF}^{ref}$	20	Temperatura de referencia, [ $^{\circ}C$ ]
$Q_{10G}$	1.6	Parámetro de crecimiento de la función de temperatura
$f_{L/F}^{ref}$	1.38	Factor de referencia de la partición de hoja-fruta
$v_2$	-0.168	Parámetro de partición de fruta-hoja, [ $K^{-1}$ ]
$T_{L/F}^{ref}$	19	Temperatura de referencia de la partición fruta-hoja, [ $^{\circ}C$ ]
$k_{RL}^{ref}$	$2,9 \times 10^{-7}$	Coefficiente de respiración de mantenimiento de las hojas, [ $s^{-1}$ ]
$Q_{10R}$	2	Parámetro de respiración de la función de temperatura
$T_R^{ref}$	25	Temperatura de referencia para respiración, [ $^{\circ}C$ ]
$k_{RF}^{ref}$	$1,2 \times 10^{-7}$	Coefficiente de respiración de mantenimiento de hojas, [ $s^{-1}$ ]
$\eta$	0,7	Calor absorbido en relación a la energía total de la radiación neta recibida.
$\frac{V_g}{A_g}$	3	Razón del volumen del invernadero por unidad de área.
$c_{yL}$	0.4805	Parámetro de cosecha adimensional.
$c_{yF}$	1.636	Parámetro de cosecha adimensional.
$C_{CO_2-0}$	1.6637	Concentración de dióxido de carbono al exterior del invernadero.
$u_V^{A_{plsd}}$ y $u_V^{A_{pwsd}}$		Apertura de ventilas.
$p_{v1}$	$7,17 \times 10^{-5}$	Parámetro
$p_{v2}$	0,0156	Parámetro
$p_{v3}$	$2,71 \times 10^{-5}$	Parámetro
$p_{v4}$	$6,32 \times 10^{-5}$	Parámetro
$p_{v5}$	$7,40 \times 10^{-5}$	Parámetro

comportamiento de dichas variables adjuntas se devuelven al tiempo directo. Con ayuda de MatLab se resolvió el sistema de ecuaciones diferenciales formado por (17) y (20) con la finalidad de conocer el comportamiento de las variables de estado y las variables adjuntas en un tiempo de dos semanas.

## 6. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

### Análisis Ante una Entrada Rampa.

Se introduce una señal de control rampa al sistema (17) y se simula en un periodo de dos semanas, con la finalidad de poder comparar esto con los resultados obtenidos al introducir al sistema la forma de control deducida en este trabajo. El comportamiento se describe en la figura (1). En la figura se observa que la masa seca de los frutos crece más que la masa seca de las hojas, lo cual es muy aceptable. Sin embargo, es importante observar que el consumo de dióxido de carbono es muy alto, lo cual representaría gastos elevados en el consumo de energía para suministrar el  $\text{CO}_2$  al microclima.

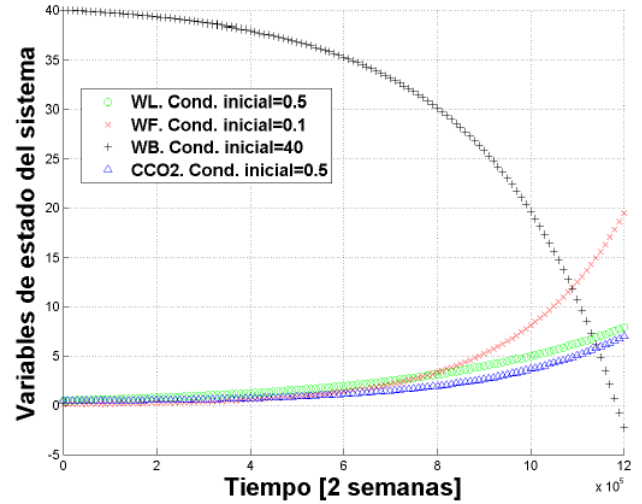


**Figura 1:** Comportamiento de la masa seca de los frutos, la masa seca de las hojas, los nutrientes y el flujo de dióxido de carbono ante una entrada rampa.

### Análisis con el Control Sintetizado.

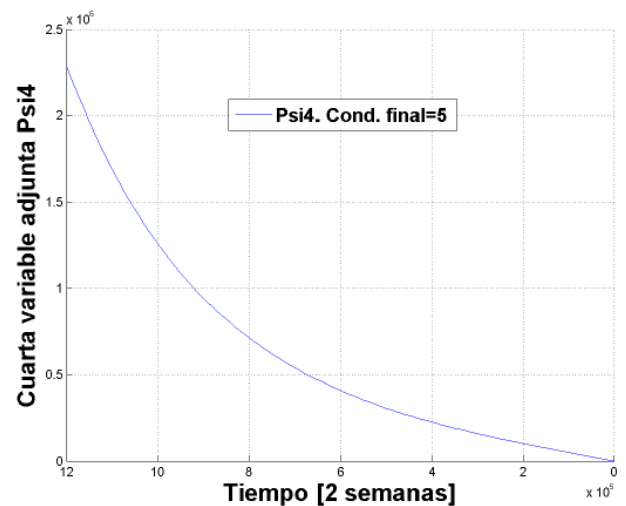
La simulación durante dos semanas, considerando la ley de control determinada en este trabajo, se presenta en la Figura (2). En dicha figura se observa como la masa seca de los frutos, la masa secas de las hojas y los nutrientes tienen un comportamiento similar al caso en que la rampa se simuló en el sistema. Pero se resalta el hecho de que con el control obtenido en este trabajo la cantidad de dióxido de carbono se redujo significativamente lo que proporcionará benefi-

cios prácticos al agricultor al obtener un ahorro en el consumo de energía por suministro de  $\text{CO}_2$ .



**Figura 2:** Comportamiento de la masa seca de los frutos, la masa seca de las hojas, los nutrientes y el flujo de dióxido de carbono durante dos semanas, con la entrada de control.

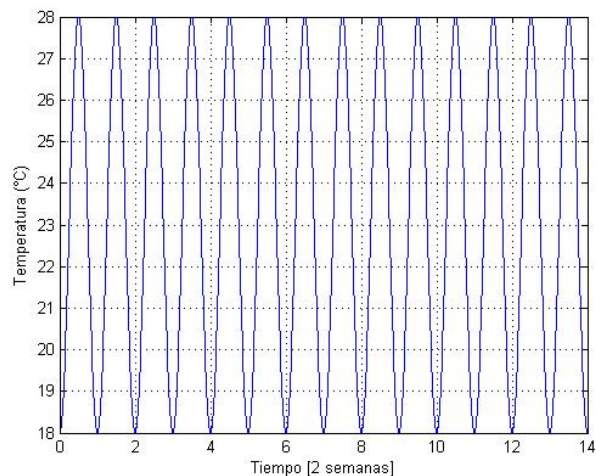
La Figura (3), muestra el comportamiento de la variable adjunta  $\Psi_4$ , dicho comportamiento es importante, dado que la expresión del control depende en cada instante de tiempo de ella. De acuerdo con la expresión (21), el comportamiento en cada instante de tiempo de la variable de estado adjunta  $\Psi_4(t)$  debe multiplicarse por el valor  $(-\frac{1}{3}0,1554 \times 10^{-10})$ , lo que proporciona el comportamiento del control.



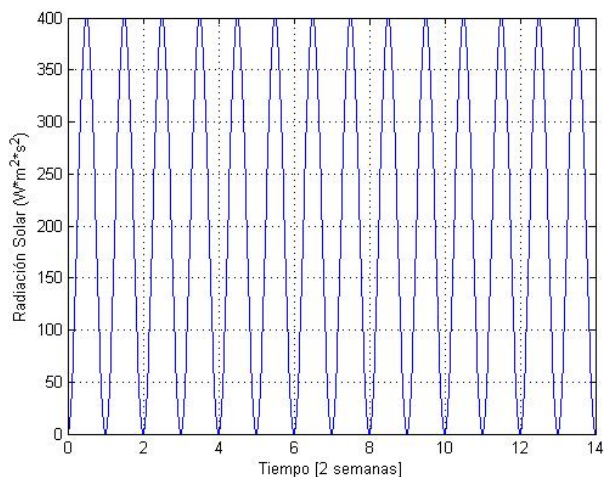
**Figura 3:** Comportamiento de la cuarta variable adjunta durante dos semanas.

## Análisis con Temperatura y Radiación Solar Variables.

En el caso anterior se consideró la temperatura y la radiación solar como constantes, el resultado fue positivo pero en la realidad estos parámetros no son constantes, sino que cambian en cada instante de tiempo durante el día y la noche, por está razón se siguió el mismo procedimiento de síntesis de control anterior, pero ahora considerando la temperatura y la radiación solar como funciones dependientes del tiempo, (Figuras 4 y 5). Al hacer el análisis, la forma de control se mantuvo igual (Ec. 21). Entoces, en la simulación solo hubo que sustituir los parámetros constantes por las funciones dependientes del tiempo.



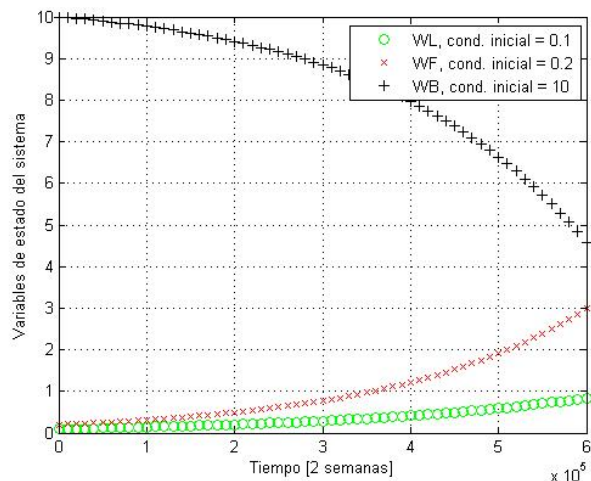
**Figura 4:** Temperatura variable al interior del invernadero.



**Figura 5:** Radiación Solar variable al interior del invernadero.

El objetivo era obtener resultados que se pudieran acomodar a la realidad y que fueran similares al resultado obtenido anteriormente. La simulación se hizo para

analizar solo las variables de estado del cultivo de tomate. Los resultados se muestran en la figura 6, donde es claro notar que el comportamiento de dichas variables tienen un comportamiento similar al caso en donde la temperatura y la radiación eran constantes. Esto es importante y significativo ya que ahora el sistema se acerca más a la realidad de las condiciones climáticas en un microclima.



**Figura 6:** Comportamiento de las hojas, los frutos y los nutrientes ante la entrada de control deducida y tomando la temperatura y la radiación solar variables.

## 7. CONCLUSIONES

Se analizó el modelo del tomate de microclima y se obtuvo la ley de control sintetizada que proporciona beneficios significativos para el agricultor, debido a que es posible obtener el mismo crecimiento en la masa seca de los frutos, pero con una disminución del flujo de dióxido de carbono. También se obtuvieron resultados importantes en cuanto al acercamiento del sistema a la realidad de las condiciones climáticas. Un análisis de las matrices de peso en el indicador de desempeño, puede proporcionar que el crecimiento de la masa seca de los frutos sea más grande de lo que se muestra en este trabajo, sin embargo dicho planteamiento es un trabajo futuro.

Por otra parte, fundamentado en este artículo, un trabajo que se está haciendo es el diseño y construcción del dispositivo electrónico que regule la concentración de dióxido de carbono, así como su aplicación en un microclima.

## 7. REFERENCIAS

[1] Aikman D. P., 1996. A procedure for optimizing carbon dioxide enrichment of a glasshouse tomato crop. *Journal of agricultural engineering research* 63, No. 2, 171–183.



- [2] Ioslovich I. and Seginer I., 1995. Normalized co-state variable for seasonal optimization of greenhouse tomato production. *Acta horticulturae* 417, 87–94.
- [3] Ioslovich I. and Seginer I., 1998. Approximate seasonal optimization of the greenhouse environment for a multi-state-variable tomato model. *Transactions of the ASAE*
- [4] Md. Shahidul I., Toshiyuki M., Yuichi Y., 1996. Effect of carbon dioxide enrichment on physico-chemical and enzymatic changes in tomato fruits at various stages of maturity. *Scientia horticulturae* 65, 137–149.
- [5] Mortensen M. L., 1987. CO<sub>2</sub> enrichment in greenhouse. *Sci. Horticulturae* 33, 1–25.
- [6] Seginer I. and Ioslovich I., 1998. Seasonal optimization of the greenhouse environment for a simple two-stage crop growth model. *Journal of agricultural engineering research*
- [7] Van Straten G., van Willigenburg L. G., van Henten E. and van Ooteghem R., 2011. *Optimal control of greenhouse cultivation*. CRC. Press, United States of America.
- [8] Van Henten E. J., 1994. *Greenhouse climate management: An optimal control approach*. Doctorate dissertation. Agricultural University, Wageningen.