

Identificación de patologías en el cerebro a partir del EEG.

María.M. Morín Castillo¹, mmorin@ece.buap.mx
José J. Oliveros Oliveros², oliveros@fcfm.buap.mx
Félix A. Aquino Camacho², fagus_7@hotmail.com
Andrés Fraguela Collar², fraguela@fcfm.buap.mx
José. M. Gutiérrez Arias¹, jmgutierrez@ece.buap.mx
José E. Flores Mena¹, eflores@ece.buap.mx
Liliana Cortes Georgievna¹, lcortes@ece.buap.mx

¹Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP, Puebla México

²Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, México

Resumen— La conductividad en las lesiones cerebrales cambia de acuerdo a la patología, estas pueden ser: edemas, calcificaciones, tumores, esto se debe al tipo de lesión que se tenga, ya que unos presentan una mayor o menor conductividad e incluso en algunos casos el llamado silencio eléctrico. En este trabajo se estudia el problema de identificar de manera única alguna de las diferentes patologías mencionadas. Como problema de identificación es importante, ya que la mayoría de estos problemas no tienen solución única. Este problema inverso se plantea por medio del EEG medido sobre el cuero cabelludo, y por medio de este se quiere identificar el daño ocurrido. Para ello se utiliza un modelo que considera a la cabeza dividida en capas conductoras que lleva a su vez a dos problemas de contorno que se obtienen de diferentes consideraciones. Para cada uno de ellos se analiza el problema de la unicidad

Palabras clave—Problema Inverso, edemas, calcificaciones.

I. INTRODUCCIÓN

Una de las principales técnicas de estudio del cerebro es la Electroencefalografía, utilizada para realizar diagnóstico y manejo de pacientes con trastornos convulsivos [1], así como de otras enfermedades degenerativas cerebrales. El Electroencefalograma (EEG) se registra sobre el cuero y corresponde al potencial generado por grandes conglomerados de neuronas trabajando simultáneamente llamados fuentes bioeléctricas y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre un electrodo explorador y otro de referencia [2, 3]. Estas fuentes pueden estar localizadas en el volumen o en la corteza cerebral [4, 5]. Entre las ventajas de la técnica del EEG se encuentran que la información que proporciona se captura en tiempo real, de manera simple, es no destructiva y económica. El problema de determinar las fuentes a través del EEG es llamado Problema Inverso Electroencefalográfico y se encuentra en la categoría de los problemas mal planteados. Esto es debido a que existen diferentes configuraciones que pueden producir el mismo EEG y a que pequeñas variaciones en los datos de entrada pueden producir variaciones sustanciales en la localización de la fuente [4, 5]. Por medio de esta técnica se han detectado posibles anomalías en el cerebro ya que la conductividad eléctrica

varía con las diferentes situaciones patológicas tales como los edemas y calcificaciones. En este trabajo se consideran algunos tipos de anomalías y se estudia el problema de unicidad de la identificación de estas a partir del EEG.

II. MODELADO MATEMÁTICO

El modelo matemático utilizado ha sido utilizado para el estudio del problema de identificación en ([4], [5], [6]); en el cual, la cabeza humana ha sido modelada por medio de capas conductoras con conductividad constante y diferente en cada capa, además de considerar la conductividad del aire como nula, se toma en cuenta también condiciones en la superficie de separación entre las capas. La actividad eléctrica del cerebro es registrada en el cuero cabelludo por medio del EEG. Como información adicional se sabe que la conductividad eléctrica de lesiones cerebrales varía con la situación patológica que se puede presentar, tales como pueden ser los edemas y calcificaciones; en el caso de los tumores, se sabe que estos son silencio eléctrico, es decir, en la zona afectada no se refleja actividad eléctrica [7]; sin embargo, es posible conocer de manera indirecta que se tiene esta patología porque se presenta una corriente eléctrica secundaria alrededor de este tipo de daño.

Con el modelo de capas conductoras se llega a un problema de valores en la frontera que establece una correlación entre las fuentes y el EEG medido sobre el cuero cabelludo. En el caso de que el daño representado es un tumor, una fuente eléctrica de actividad cerebral anormal j^p podría ser generada alrededor de dicho tumor dando lugar a EEG anormal [7]. En la frontera que separa al cerebro sano de la parte dañada ya no pueden considerarse las condiciones de transmisión (igualdad de los potenciales y de los flujos de corriente) por la aparición de estas corrientes. Además, donde está localizado el tumor no hay fuentes bioeléctricas por lo que ya no se satisface la ecuación de Poisson sino la ecuación de Laplace. En este caso, el problema inverso consiste en determinar a la mencionada corriente secundaria a partir del EEG sobre el cuero cabelludo. Esto es, debemos determinar la corriente, además de su dominio. Por lo tanto, se tiene un problema con dos incógnitas. Esto nos

lleva a no poder determinar de maneja única tal fuente. Si despreciamos la actividad de fuentes bioeléctricas tanto volumétricas como corticales, el problema de contorno que se satisface es el siguiente:

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{en } \Omega_0, \quad (1)$$

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2)$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (3)$$

$$u_0 = u_1 \quad \text{en } S_0, \quad (4)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0}{\partial n_0} = \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_0} + j^p \cdot n_0 \quad \text{en } S_0, \quad (5)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } S_1, \quad (6)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{en } S_1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{en } S_2. \quad (8)$$

donde $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ representa a la cabeza, Ω_0 la región de la anomalía, Ω_1 el cerebro, Ω_2 el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo), σ_0 , σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_0 , Ω_1 y Ω_2 , n_i , $i=0,1,2$ son las vectores normales; $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i=1,2$ y u representa al potencial eléctrico en Ω . El símbolo Δ representa al operador laplaciano,

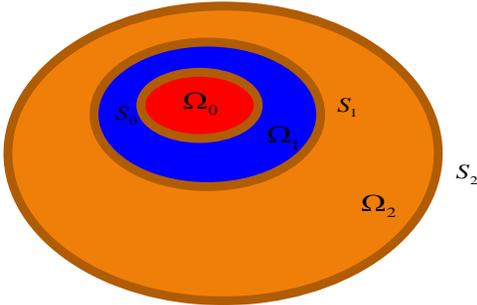


Figura 1. Representación esquemática de la cabeza con la anomalía cerebral.

Para analizar las condiciones de existencia de la solución usamos la técnica clásica; usando las fórmulas de Green, de donde se deduce la siguiente condición de compatibilidad

$$\int_{S_0} j^p(x) \cdot n_0(x) dx = 0. \quad (9)$$

En lo que sigue usaremos la notación $\varphi = j^p \cdot n_0$.

Aquí suponemos que la componente normal de la corriente φ es diferente de cero. El caso en el que la corriente es nula será considerado más abajo.

En la siguiente sección se estudiará el problema de identificar a la fuente φ usando el problema (1)-(8) y la condición:

$$u_2|_{S_2} = V.$$

III. RESULTADOS CONOCIDOS

En el caso en el que conocemos a la región Ω_0 y por ende a su frontera $\partial\Omega_0$, se tiene el siguiente resultado [5].

Dada una medición V sobre S_2 existe una única fuente φ (salvo constantes) que satisface la condición (9) que la produce.

En la referencia [5] se utilizan técnicas de la teoría de potencial y considera fuentes en corteza cerebral. En este trabajo se presenta una nueva demostración.

Supongamos que existen dos fuentes $\hat{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}$ que producen los potenciales \hat{u} y \tilde{u} respectivamente y que generan la misma medición V . Sea $u = \hat{u} - \tilde{u}$. Tenemos entonces que u es armónica en Ω_2 y que satisface sobre S_2 las

condiciones de frontera $\frac{\partial u}{\partial n_2} = 0$ y $u = 0$. Estos son

conocidos como datos de Cauchy. Debido a la unicidad de solución de este problema se encuentra que u es cero en

Ω_2 . Restringiendo u y $\frac{\partial u}{\partial n_1}$ a S_1 hallamos que los datos

de Cauchy sobre S_1 son nulos debido a las condiciones de frontera y ya que u es armónica en $\Omega_1 - \Omega_0$, (la región sana del cerebro), se halla que u es cero en $\Omega_1 - \Omega_0$.

Tomando en cuenta que u es armónica en Ω_0 y sobre $\partial\Omega_0$ es nula, se concluye, por el principio del máximo para funciones armónicas, que u es nula en todo Ω_0 . Aplicando la condición de frontera (5) relativa a los flujos de corriente se concluye que $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}$. Con esto se termina la demostración.

Este resultado garantiza que las fuentes sobre la corteza cerebral se pueden determinar de manera única a partir del EEG sobre el cuero cabelludo.

IV. RESULTADO DE NO UNICIDAD

El resultado de unicidad anterior no permite hallar la región Ω_0 o su frontera, la cual al ser cerrada, define a la región completamente. Esto es porque suponemos que conocemos a la región en la que está localizada la anomalía. Esto es, necesitamos hallar de la función φ tanto el dominio como su regla de correspondencia. Tenemos dos incógnitas. Por ello, recuperar dichas incógnitas de solo una medición no es posible. Lo cual se muestra a continuación.

Tomemos una medición V sobre S_2 y consideremos dos problemas (1)-(8) con diferentes regiones Ω_0 y $\tilde{\Omega}_0$. Claramente se definen con ellas el resto de las respectivas regiones. Procedamos de la forma en que se hizo en la demostración del resultado de unicidad anterior. Con los datos de Cauchy podemos hallar, en los respectivos problemas, las correspondientes fuentes que producen la medición V . Estas son diferentes ya que tienen diferente dominio.

En el caso en el que las corrientes que se genera alrededor del tumor tenga componente normal nula, suponiendo que el EEG está asociado a la presencia de ese tumor, podemos recuperar a la componente tangencial de la fuente a partir de:

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tau_0} = \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tau_0} + j^p \cdot \tau_0 \quad \text{en } S_0.$$

donde τ_0 representa a un vector tangente a la superficie S_0 .

En este caso, al suponer en la condición sobre los flujos de corriente (5) que $\varphi = j^p \cdot n_0 = 0$ tenemos que el potencial que produce la medición es único si suponemos que conocemos a la región Ω_0 . De esta forma, se tiene la unicidad de las componentes tangenciales. En caso de que no se conozca la ubicación de la región Ω_0 , entonces no se tiene unicidad y la idea de la demostración es la misma que para el caso presentado anteriormente en esta misma sección.

V. UNA ALTERNATIVA EN LA MODELACIÓN DE TUMORES. UN RESULTADO DE UNICIDAD

Una forma de modelar la presencia de tumores es la siguiente: debido a que el tumor es silencio eléctrico, podemos considerar que la región ocupada por él corresponde a un dieléctrico ideal. De esto podemos considerar que el potencial u_1 sobre $\partial\Omega_0 = S_0$ es nulo. Tenemos entonces el problema de valores en la frontera siguiente:

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (10)$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (11)$$

$$u_0 = u_1 \quad \text{en } S_0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_0} = 0 \quad \text{en } S_0, \quad (13)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } S_1, \quad (14)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_1 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{en } S_1, \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_1} = 0 \quad \text{en } S_2. \quad (16)$$

En este caso el problema se transforma en uno en el que se debe determinar la región ocupada por el tumor. Tenemos el siguiente resultado de unicidad:

Sean $\hat{\Omega}_0$ y $\tilde{\Omega}_0$ dos regiones convexas en la que se encuentran tumores que producen la misma medición V no constante. Entonces $\hat{\Omega}_0 = \tilde{\Omega}_0$.

En lo que sigue denotemos por $\tilde{\Omega}_0^A = \Omega - \tilde{\Omega}_0$ y por $\hat{\Omega}_0^A = \Omega - \hat{\Omega}_0$. Consideremos, sin pérdida de generalidad, el caso en el que $\hat{\Omega}_0 \cap \tilde{\Omega}_0 \neq \Phi$. Sean \hat{u} y \tilde{u} los potenciales producidos en la región Ω que producen la misma medición V sobre el cuero cabelludo. Sea $u = \hat{u} - \tilde{u}$. Sea $W = \Omega - (\hat{\Omega}_0 - \tilde{\Omega}_0)$. Se tiene que u satisface la ecuación de Laplace en W y sobre S_2 tiene datos de Cauchy nulos. Por ello, $u = 0$ en W . Sea $W^* = (\Omega - \tilde{W}) - \hat{\Omega}_0$. Sean $\tilde{\Gamma}_0 = \partial\tilde{\Omega}_0$ y $\Gamma_0 = \partial\hat{\Omega}_0$. Notemos que \hat{u} está definida sobre W^* y que sobre su frontera ∂W^* se cumple que $\frac{\partial \hat{u}}{\partial n} = 0$. Esto último sigue

de observar de que cada punto de la frontera de W^* pertenece a Γ_0 o pertenece a $\partial W \cap \tilde{\Gamma}_0$. Como \hat{u} es armónica en W^* y en su frontera satisface una condición de

Neumann nula se concluye, por el principio del máximo para funciones armónicas, que \hat{u} es constante en W^* . De esto se halla que \hat{u} es constante en $\tilde{\Omega}_0^A$ y por lo tanto, es constante en S_2 lo cual contradice el hecho de que V no es constante.

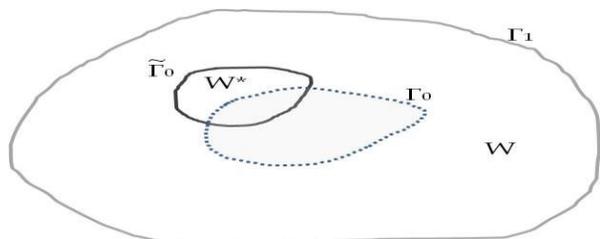


Figura 2. Regiones para la prueba de unicidad.

La convexidad en el resultado anterior es una hipótesis aceptable dentro de la modelación, pues el tejido fibroso que encierra a la anomalía forma una cápsula convexa como se ilustra en la figura 3.

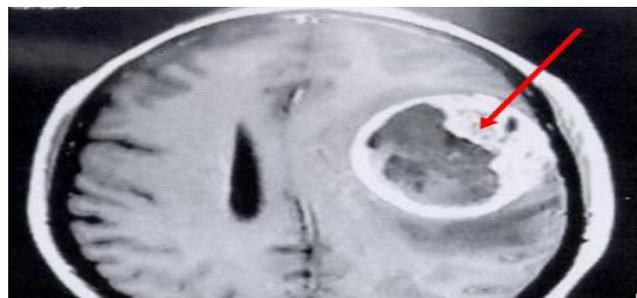


Figura 3 Imagen de resonancia magnética. Fuente: http://www.neuromed.cl/mostrar_detalle.php?id=21

V. Conclusiones

Resultados de unicidad han sido establecidos en electroencefalografía para fuentes dipolares y asociadas a potenciales evocados ubicadas en el volumen cerebral [8]. Para el caso de fuentes distribuidas que se representan por funciones de cuadrado integrable sobre el volumen cerebral se probó que sólo es posible recuperar la componente armónica de la fuentes, es decir, existen una infinidad de fuentes que producen la misma medición lo cual es una de las razones del mal planteamiento del problema [4], [9]. Para fuentes en corteza cerebral se probó la unicidad de la recuperación de fuentes, que se representan por funciones de cuadrado integrable sobre la corteza cerebral [5]. Usando

la técnica presentada en este trabajo puede probarse la unicidad de recuperación para fuentes dipolares sobre corteza cerebral. Existen resultados de no unicidad para fuentes dipolares y representadas por funciones de cuadrado integrable definidas sobre el volumen cerebral [4], [10], [11]. En este trabajo el problema inverso de identificar anomalías en el cerebro ha sido modelado de dos formas, las cuales llevan un resultado de unicidad y a otro de no unicidad.

Se presentan resultados de unicidad para el caso de anomalías tales como tumores, edemas y calcificaciones. También se muestra que no es posible determinar la componente normal o la tangencial de la corriente de manera única si no tenemos información sobre la ubicación de la fuente asociada a la anomalía.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Smith S. J. M. "EEG in the diagnosis, classification, and management of patients with epilepsy". *Neurol. Neurosurg. Psychiatry* 2005; 76.
- [2] Nuñez P. "Electric Field of the Brain". Oxford Univ. Press, New York (USA), 1981.
- [3] Grave R, González S and Gómez CM. "Bases biofísicas de la localización de los generadores cerebrales del Electroencefalograma. Aplicación de un modelo de tipo distribuido a la localización de focos epilépticos". *Rev. Neurol.*, 2004; **39**: 748-756.
- [4] Fraguela A, Morín M, Oliveros J. "Inverse electroencephalography for volumetric sources" *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008; **78**: 481-492.
- [5] Fraguela A., Oliveros J., Morín M. "Inverse electroencephalography for cortical sources". *Applied Numerical Mathematics*, 2005; **55**(2): 191-203.
- [6] Tsitsas N and Ma P. "Finding a source inside a sphere". *Inverse problems*. 2012; **28**.
- [7] Ueno S., Wakisako H. "Determination of the spatial distribution of abnormal EEG and MEG from current dipole in inhomogeneous volume conductor" *Il Nuovo Cimento*, 1983; **2**(D):558-566.
- [8] Amir A. "Uniqueness of the generators of brain evoked potential maps". *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1994, pp. 1-11.
- [9] El Badia A. and Ha-Duong T. "Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements". *Inverse Problems*, 1998, **14**, No 4, 883-891.
- [10] El Badia A. and Ha-Duong T. "An inverse source problem in potential analysis". *Inverse Problems*, 2000, **16**, pp. 651-663.
- [11] Dassios G. and Hadjiloizi D. "On the non-uniqueness of the inverse problem associated with electroencephalography". *Inverse Problems*, 2009, **25**.