

# Una propuesta metodológica para la generación de trayectorias articulares de un manipulador robótico industrial. Una visión desde los criterios de diseño

Alejandro HOSSIAN, Roberto CARABAJAL, Maximiliano ALVEAL, Patricio BUSTAMANTE  
Facultad Regional Neuquén – Universidad Tecnológica Nacional  
Plaza Huincul (CP: Q8322) – Neuquén – Argentina [alejandrohossian@yahoo.com.ar](mailto:alejandrohossian@yahoo.com.ar)

Hernán MERLINO  
Departamento de Sistemas – Universidad Nacional de Lanús  
Lanús (CP: 1824) – Argentina

## RESUMEN

Los desplazamientos del extremo de un robot manipulador de un punto a otro en su espacio de trabajo, se corresponden con el movimiento de cada articulación del mismo, conforme a una función continua del tiempo. El cálculo de estas funciones de movimiento refiere a la “Generación de Trayectorias Articulares”. En este artículo de investigación se propone un método de obtención de generación de trayectorias en el espacio articular; el cual posee como insumo de entrada la matriz de transformación homogénea final  ${}^0T_n$  suministrada por el modelo cinemático directo, la cual contiene la información de las coordenadas cartesianas del extremo en función de las variables articulares ( ${}^0p_n(t)$  en función de  $q(t)$ ); siempre respecto a un sistema de referencia asociado a la base del robot. El producto de salida que se obtiene son las funciones interpoladoras de posición, velocidad y aceleración articulares (estos elementos se llaman trayectorias articulares). Este método contempla la cumplimentación de criterios de diseño; como ser el monitoreo de la aceleración articular máxima obtenida, de manera que no supere el valor admisible de tolerancia estipulado por el fabricante ( $q_{max} \leq q_{adm}$ ). Si no se satisface esta condición, se recalcula el tiempo de actuación con la aceleración admisible.

**Palabras Claves:** trayectorias articulares, espacio de trabajo, criterio de diseño.

## 1. INTRODUCCIÓN

El efector terminal de un manipulador robótico industrial describe una determinada trayectoria cuando realiza una cierta tarea en su entorno de operación (pintura, ensamblado, etc). Este trabajo se enfoca en la generación de estas trayectorias conforme a las especificaciones del usuario. En la figura 1 se muestra una situación en la que el extremo del manipulador se mueve desde el punto A hasta el B; para que ese hecho tenga lugar, se calcula una trayectoria que cada articulación debe seguir. En este contexto, se entiende por trayectoria a un historial en la línea de tiempo de posición, velocidad y aceleración para cada grado de libertad. En otras palabras, así como el modelo cinemático y dinámico de un robot se focaliza en la obtención de estrategias de control que derramen en una mejor calidad de sus movimientos, el control cinemático se ocupa de establecer la evolución temporal que debe seguir cada articulación del manipulador para alcanzar los objetivos prefijados por el usuario [1]. Caben citar objetivos tales como: punto de destino, puntos intermedios, trayectoria cartesiana del órgano terminal y tiempo invertido por el usuario entre otros.

Asimismo, es conveniente que cada articulación comience y finalice su movimiento de forma simultánea, siendo el movimiento conjunto del robot lo más coordinado posible [2].

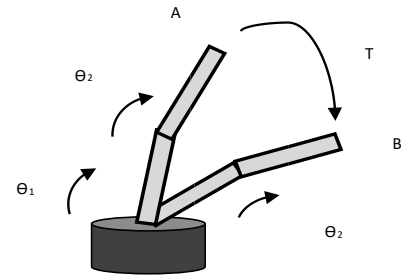


Figura 1: Trayectoria (T) del órgano terminal del robot desde un punto A hasta B con las variables articulares  $\theta_1$  y  $\theta_2$

## 2. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

El grupo de investigación en “Robótica aplicada a la Ingeniería” desarrolla un proceso de investigación que implementa un modelo que se estructura en base a tres fases; tendientes a optimizar el diseño de un manipulador robótico industrial. La primera desarrolla la Cinemática del Robot; obteniendo los Modelos Cinemático Directo e Inverso y el Modelo Diferencial. La segunda fase se corresponde con la Dinámica del Robot para la obtención del Modelo Dinámico; mientras que la tercera, se refiere a los aspectos de Control, cuyos algoritmos permiten mejorar las características de posición, velocidad y precisión. El problema que se analiza en este artículo se encuadra dentro de esta tercera fase del modelo de proceso de investigación. El problema del control posee dos vertientes: el control cinemático y el control dinámico [3]. El primero selecciona trayectorias que debería seguir el robot para ajustarse lo mejor posible a los requisitos del usuario; y el segundo, custodia que las trayectorias seguidas por el robot  $q(t)$  guarden la mayor similitud con las propuestas por el control cinemático. Más específicamente, el presente artículo trata la generación de trayectorias articulares en el marco del control cinemático.

El modelo de proceso de investigación y desarrollo con sus tres fases se detalla en la figura 2; en la cual se observa resaltado el módulo de Control Cinemático y su vinculación con la fase de Control. También se ilustra el suministro de insumos entre las diferentes fases del proceso. En tal sentido, la fase de cinemática del robot genera referencias a las fases de dinámica y control del robot [4]; y la de dinámica suministra insumos a la fase de control, para la realización del control dinámico [5].

A modo de ejemplo, se implementa el algoritmo computacional de Lagrange en Matlab, haciendo uso del toolbox correspondiente propio de robótica.

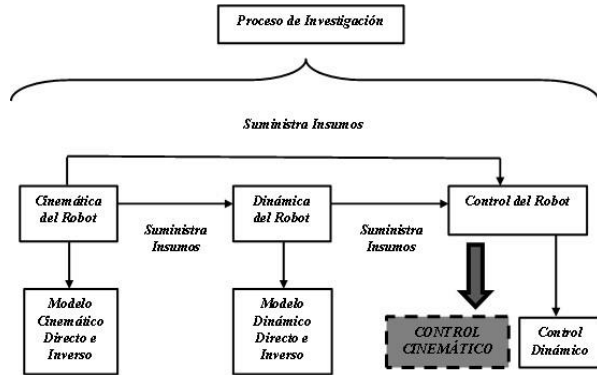


Figura 2: Modelo de Proceso de Investigación y Desarrollo

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En el nivel de diseño preliminar se dispone de la matriz de transformación homogénea (MTH) con la información de las coordenadas cartesianas del efector final en función de las variables articulares ( ${}^0p^n(t)$  en función de  $q(t)$ ), respecto al sistema de referencia asociado a la base del robot. Con estas expresiones, se obtienen las ecuaciones cinemáticas inversas ( $q(t)$  en función de  ${}^0p^n(t)$ ), que constituyen el insumo central de este proceso metodológico para la obtención de las trayectorias articulares (posición  $q(t)$ , velocidad  $q'(t)$  y aceleración  $q''(t)$ ).

**3.1 Trayectorias en el espacio cartesiano** Los modelos cinemáticos estudian la relación entre el espacio de las variables articulares y el espacio de trabajo o cartesiano del robot. Para conseguir un adecuado control del movimiento del manipulador, el usuario debe especificar las localizaciones espaciales por las que debe pasar el extremo: puntos de paso, velocidades, aceleraciones máximas y tipo de trayectoria. En figura 3 se muestra el extremo de un manipulador que se desplaza desde un punto "A" a un punto "B" pasando por puntos intermedios ( $P_{i1}$  y  $P_{i2}$ ), y en trayectoria en línea recta.

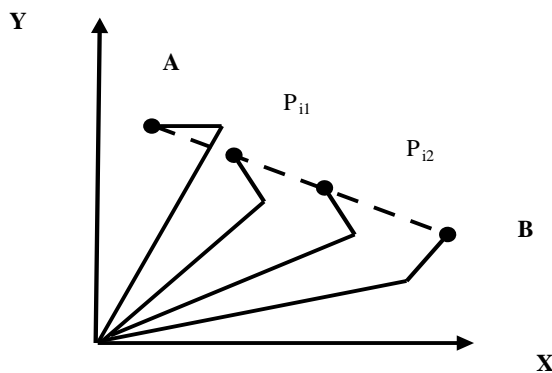


Figura 3: Trayectoria en el espacio de trabajo para un robot de dos grados de libertad

Los puntos muestreados en el espacio de trabajo se deben elegir en base a un escenario de compromiso entre la cantidad de puntos seleccionados y el error cometido entre la trayectoria obtenida y la deseada por el usuario. En otros términos, la trayectoria desarrollada por el extremo del robot no corresponde exactamente a una línea recta en el espacio [2], intentando aproximarse en menor o mayor medida a la línea recta deseada por el usuario, tal como se ilustra en la figura 4.

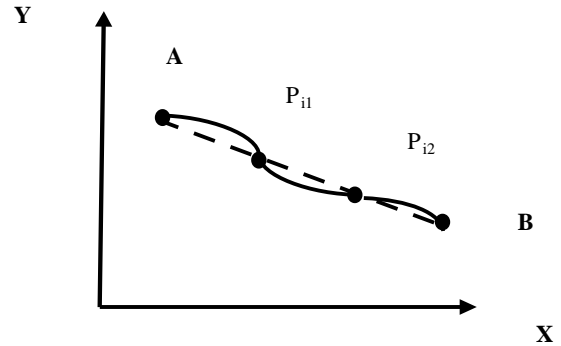


Figura 4: Trayectoria real aproximada a la trayectoria recta deseada en el espacio de trabajo

### 3.2 Trayectorias en el espacio articular

Conocidos los puntos por los que debe pasar el extremo del manipulador en su entorno de operación, se convierten estos valores a sus correspondientes coordenadas en el espacio articular [6]. Así se obtienen las funciones continuas de posición, velocidad y aceleración en este espacio ( $q_i(t)$ ,  $q_i'(t)$  y  $q_i''(t)$ ). Con la secuencia de configuraciones articulares por las que debe pasar el efector final; estos valores se interpolan procurando suavidad en los movimientos (continuidad en la primera derivada (velocidad articular) y en la segunda derivada (aceleración articular). Una posible elección para el ensamble de los puntos en el espacio articular, consiste en una función polinómica continua (en el presente artículo se toma de tercer grado) cuyos parámetros se ajustan de acuerdo a ciertas condiciones de contorno de posición, velocidad y aceleración (también llamadas funciones spline [9]). Se deben cumplir cuatro condiciones: posición inicial y final, especificadas; y velocidades iniciales y final nula. Se usa así un polinomio cúbico; y se obtienen los coeficientes del tipo (1) para  $t = 0$ .

$$q(t) = Dt^3 + Ct^2 + Bt + A \quad \text{Ec. (1)}$$

Las cuatro condiciones de contorno son:

- I.  $q(t_{inicial}) = q(0) = q_{inicial}$ ,
- II.  $q(t_{final}) = q_{final}$
- III.  $\dot{q}(t_{inicial}) = \dot{q}(0) = 0$ ,
- IV.  $\dot{q}(t_{final}) = 0$

De hacer cumplir las condiciones de contorno I y II a la ecuación 1), se obtienen las siguientes relaciones 2 y 3:

$$q(t_{inicial}) = q(0) = A \rightarrow q_{inicial} = A \quad \text{Ec. (2)}$$

$$q(t_{final}) = q_{final} = Dt^3_{final} + Ct^2_{final} + Bt_{final} + A \quad \text{Ec. (3)}$$

Derivando la expresión 1 respecto al tiempo y haciendo cumplir las condiciones III y IV, se obtienen las relaciones 4, 5 y 6:

$$\dot{q}(t) = 3Dt^2 + 2Ct + B \quad \text{Ec. (4)}$$

$$\dot{q}(t_{inicial}) = \dot{q}(0) = B = 0 \rightarrow B = 0 \quad \text{Ec. (5)}$$

$$\dot{q}(t_{final}) = 3Dt^2_{final} + 2Ct + 0 \quad (\text{Dado que } B = 0) \quad \text{Ec. (6)}$$

Con los coeficientes A y B y las condiciones de contorno 3 y 6; el sistema de ecuaciones que se obtiene permite la determinación de los coeficientes C y D. Y se obtienen las expresiones 7, 8, 9 y 10 para todos los coeficientes [6]:

$$A = q_{inicial} \quad \text{Ec. (7)}$$

$$B = 0 \quad \text{Ec. (8)}$$

$$C = \frac{3(q_{final} - q_{inicial})}{t^3_{final}} \quad \text{Ec. (9)}$$

$$D = \frac{-2(q_{final} - q_{inicial})}{t^3_{final}} \quad \text{Ec. (10)}$$

#### 4. SOLUCIÓN PROPUESTA

La solución que se propone al problema que se plantea en este trabajo, se basa en un método de obtención de las trayectorias articulares (posición, velocidad y aceleración) en función de los requerimientos del usuario; y en el marco del módulo de control cinemático. El insumo de entrada al método es la MTH [7] suministrada por modelo cinemático directo; y el producto de salida son las funciones interpoladoras de posición, velocidad y aceleración articulares (trayectorias articulares). En figura 6 se ve la entrada y la salida al módulo de control cinemático.

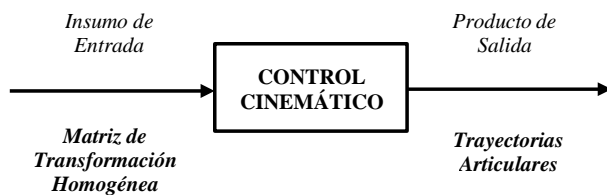


Figura 6: Insumo de entrada y Producto de salida al Módulo de Control Cinemático para la implementación del método de obtención de trayectorias articulares

Este método consta de tres etapas que se desarrollan en forma interconectada, a los efectos de obtener las correspondientes trayectorias articulares [8]. Por la figura 7, la primera etapa convierte los puntos suministrados por la MTH en el espacio cartesiano a valores deseados de ángulos y desplazamientos en el espacio articular, por medio de las ecuaciones cinemáticas inversas. En la segunda etapa se obtiene un prototipo de las funciones polinómicas interpoladoras representativas de las trayectorias articulares, obteniendo los coeficientes que las

conforman de acuerdo a las condiciones de contorno establecidas. En la tercera etapa se custodia el cumplimiento del (o los) criterios de diseño adoptados. Un posible criterio de diseño es monitorear el valor máximo obtenido de aceleración articular, de manera que no supere el tope admisible estipulado por el fabricante ( $q_{max}'' \leq q_{adm}''$ ). Si este criterio no se satisface, se recalculan las trayectorias articulares en función del mismo (caja punteada en figura 7). Caso contrario, se adoptan las trayectorias articulares para esa instancia de la metodología.

#### 5. ANÁLISIS DE CASO

Se estudia un robot manipulador esférico de tres grados de libertad RRP (Rotatorio, Rotatorio, Prismático). Este robot posee dos articulaciones rotatorias representadas por las variables articulares  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  (para las articulaciones 1 y 2 respectivamente) y una

articulación prismática representada por la variable articular  $D_3$  (para la articulación 3). La figura 8 ilustra el esquema del robot con las correspondientes variables articulares y el sistema de referencia  $S_0$  ( $X_0, Y_0$  y  $Z_0$ ). No incluye el control de la orientación del extremo o muñeca del se manipulador en este análisis; por consiguiente, es de interés la última columna de la MTH  ${}^0T_3$ .

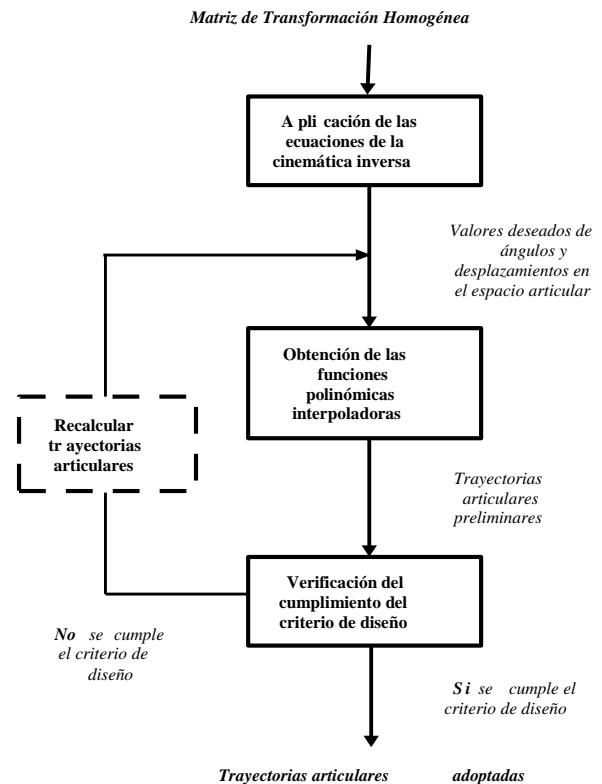


Figura 7: Método de obtención de las trayectorias articulares en el marco del módulo de control cinemático

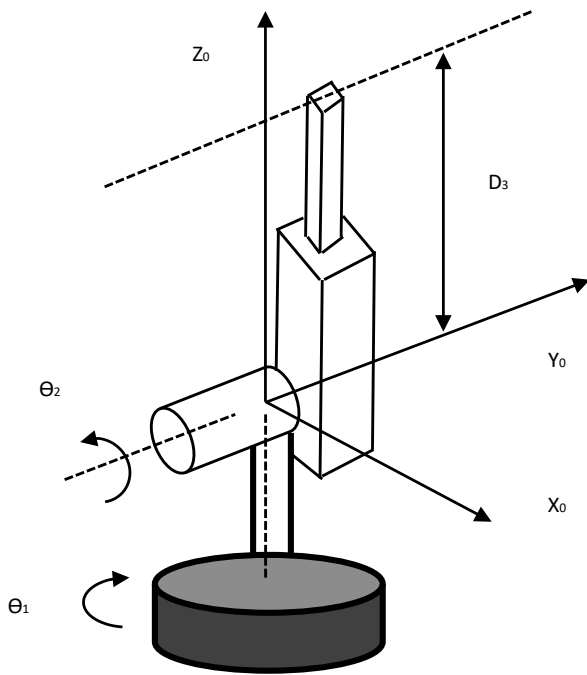


Figura 8: Robot manipulador esférico RRP

Esta columna especifica la posición del extremo para un determinado punto del espacio cartesiano (al que se le asocia un sistema de referencia  $S_3$ ) en términos del sistema de referencia  $S_0$ , y en función de las variables articulares. Esta matriz constituye el elemento de entrada al método, y es la siguiente:

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 D_3 & c_1 s_2 D_3 \\ c_2 s_1 & c_1 & s_1 s_2 D_3 & s_1 s_2 D_3 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posición del extremo del robot en el espacio cartesiano son las tres coordenadas dadas por las expresiones a, b y c:

$$P_{xe} = c_1 s_2 D_3 \quad \text{a);}$$

$$P_{ye} = s_1 s_2 D_3 \quad \text{b) y}$$

$$P_{ze} = c_2 D_3 \quad \text{c)}$$

Estas expresiones obtenidas del modelo cinemático directo, son la entrada al módulo del control cinemático, para implementar el método de obtención de las trayectorias articulares.

**1<sup>RA</sup> Etapa:** aplicación de las ecuaciones de la cinemática inversa: el manejo de las expresiones a, b y c; permite expresar las variables articulares en función de las posiciones cartesianas del extremo, adoptándose una de las soluciones que brinda la cinemática inversa. Se obtienen así las siguientes expresiones:

$$\theta_1 \arctg\left(\frac{P_{ye}}{P_{xe}}\right) \text{ d); } \theta_2 \arctg\left(\frac{\pm \sqrt{(P_{xe}^2 + P_{ye}^2)}}{P_{ze}}\right) \quad \text{e)}$$

$$D_3 = \sqrt{P_{xe}^2 + P_{ye}^2 + P_{ze}^2} \quad \text{f)}$$

**2<sup>DA</sup> Etapa:** obtención de las funciones polinómicas interpoladoras: aquí se obtiene valores de variables articulares para ciertas posiciones del extremo en el espacio cartesiano. El usuario especifica que el efector final se debe mover desde un punto inicial  $P_{ie} = (0, 1, 1)$  hasta uno final  $P_{fe} = (0, 2, 0)$ ; s puntos intermedios. Se asume una trayectoria recta entre los puntos en un período de 5 segundos, y aceleración articular admisible de  $12^\circ/\text{seg}^2$ . Reemplazando las coordenadas cartesianas del punto inicial del extremo del manipulador ( $P_{ixe} = 0$ ,  $P_{iye} = 1$  y  $P_{ize} = 1$ ) en las ecuaciones d, e y f; se obtienen los valores correspondientes de dichas coordenadas en el espacio articular ( $\Theta_{i1} = 90^\circ$ ,  $\Theta_{i2} = 45^\circ$  (se toma el signo positivo en la ecuación e) y  $D_3 = \sqrt{2}$ ). De manera análoga, para el punto final del efector ( $P_{fxe} = 0$ ,  $P_{fye} = 2$  y  $P_{fze} = 0$ ), los valores en el espacio articular son:  $\Theta_{f1} = 90^\circ$ ,  $\Theta_{f2} = 90^\circ$  (se toma el signo positivo en la ecuación e) y  $D_3 = 2$ . Cabe analizar la situación física real en el espacio de trabajo del manipulador; teniendo en cuenta que el punto inicial  $P_{ie} = (0, 1, 1)$ , y el final  $P_{fe} = (0, 2, 0)$ , se encuentran en el plano  $Z_0 - Y_0$ , que es donde se desarrolla la trayectoria en línea recta del extremo. La variable  $\Theta_1$  es de  $90^\circ$  en todo el trayecto). Siempre en el en el plano  $Z_0 - Y_0$ ; la variable  $\Theta_2$  pasa de un ángulo de  $45^\circ$  a uno de  $90^\circ$  con respecto al eje  $Z_0$ , mientras que  $D_3$  crece desde un valor de  $\sqrt{2}$  hasta 2 (si esta variable se mantuviera constante, describiría una circunferencia en el plano de trabajo). Esto se ve en la figura 9. Para las variables  $\Theta_1(t)$ ,  $\Theta_2(t)$  y  $D_3(t)$  se proponen funciones interpoladoras tipo 1)  $q(t) = Dt^3 + Ct^2 + Bt + A$ ; cuyos coeficientes se obtienen por las expresiones 7, 8, 9 y 10, y las condiciones III y IV.

$$\dot{q}(t_{inicial}) = \dot{q}(0) = 0 \text{ y } \dot{q}(t_{final}) = 0.$$

Por la 8,  $B = 0$  para todas las variables. Para  $\Theta_1$  se tiene:

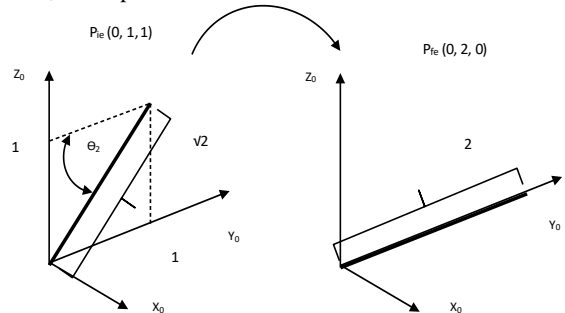


Figura 9: Trayectoria del extremo del manipulador en el espacio de trabajo desde  $P_{ie} (0, 1, 1)$  hasta  $P_{if} (0, 2, 0)$

$$A = \Theta_{1i} \rightarrow A = 90^\circ, C = \frac{3(90^\circ - 90^\circ)}{5 \text{seg}^2} = 0^\circ / \text{seg}^2 \text{ y}$$

$$D = \frac{-2(90^\circ - 90^\circ)}{5 \text{seg}^3} = 0^\circ / \text{seg}^3.$$

Se ve que  $\Theta_1$  se mantiene constante e igual a  $90^\circ$ ; por lo que también se cumple:

$$\theta_1(t) = 90^\circ \text{ y } \dot{\theta}_1(t) = 0 \text{ y } \ddot{\theta}_1(t) = 0 \quad \text{Ec. (11)}$$

Para la variable articular  $\Theta_2$  se tiene:

$$A = \theta_{2i} \rightarrow A = 45^\circ, C = \frac{3(90^\circ - 45^\circ)}{5 \text{seg}^2} = 5,4^\circ \text{seg}^2 \text{ y}$$

$$D = \frac{-2(90^\circ - 45^\circ)}{5 \text{seg}^3} = -0,72^\circ / \text{seg}^3.$$

Con estos coeficientes se confeccionan las funciones de posición, velocidad y aceleración articular para la variable articular  $\Theta_2$ .

$$\theta_2(t) = -0,72t^3 + 5,4t^2 + 45^\circ \quad \text{Ec. (12)}$$

$$\dot{\theta}_2(t) = -2,16t^2 + 10,8t \quad \text{Ec. (13)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -4,32t + 10,8 \quad \text{Ec. (14)}$$

Se releva la siguiente información de interés para el diseñador:

$$\theta_2(0 \text{seg}) = 45^\circ, \theta_2(5 \text{seg}) = 90^\circ, \theta_2(2,5 \text{seg}) = 67,5^\circ$$

$$\dot{\theta}_2(0 \text{seg}) = 0^\circ / \text{seg}, \dot{\theta}_2(5 \text{seg}) = 0^\circ / \text{seg}$$

$$\dot{\theta}_2(2,5 \text{seg}) = 13,5^\circ / \text{seg} = \dot{\theta}_{2\text{MAX}}$$

$$\ddot{\theta}_2(0 \text{seg}) = 10,8^\circ / \text{seg} \text{ y } \ddot{\theta}_2(5 \text{seg}) = -10,8^\circ / \text{seg}$$

Estos son los valores máximos de aceleración articular para la variable  $\Theta_2$  ( $10,8^\circ / \text{seg}^2$  en valor absoluto); el cual no puede superar el valor admisible de acuerdo al criterio de diseño, que para este caso se estableció en  $\Theta_{2\text{ADM}} = 12^\circ / \text{seg}^2$ . Por otra parte, para  $t = 2,5$  seg (punto de inflexión para  $\Theta_2(t)$ ), la velocidad articular alcanza su valor máximo de  $13,5^\circ / \text{seg}$ , siendo nula la aceleración articular.

Es decir:  $\ddot{\theta}_2(2,5 \text{seg}) = 0^\circ / \text{seg}^2$ .

Para la variable articular  $D_3$  se tiene:

$$A = D_{3i} \rightarrow A = \sqrt{2} = 1,4141m$$

$$C = \frac{3(2m - 1,414m)}{5 \text{seg}^2} = 0,0703m / \text{seg}^2 \text{ y}$$

$$D = \frac{-2(2m - 1,414m)}{5 \text{seg}^3} = -0,0094m / \text{seg}^3$$

coeficientes se confeccionan las funciones de posición, velocidad y aceleración articular para la variable articular  $D_3$ .

$$D_3(t) = -0,0094t^3 + 0,0703t^2 + 1,414 \quad \text{Ec. (15)}$$

$$\dot{D}_3(t) = -0,0282t^2 + 0,1406t \quad \text{Ec. (16)}$$

$$\ddot{D}_3(t) = -0,056t + 0,1406 \quad \text{Ec. (17)}$$

Se releva la siguiente información de interés para el diseñador:

$$D_3(0 \text{seg}) = 1,414m, D_3(5 \text{seg}) = 2m \text{ y } D_3(2,5 \text{seg}) = 1,7m$$

$$\dot{D}_3(0 \text{seg}) = \dot{D}_3(5 \text{seg}) = 0m / \text{seg}$$

$$\dot{D}_3(2,5 \text{seg}) = 0,1752m / \text{seg} = D_{3\text{MAX}}$$

$$\ddot{D}_3(0 \text{seg}) = 0,1406m / \text{seg}^2 \text{ y } \ddot{D}_3(5 \text{seg}) = -0,1406m / \text{seg}^2$$

Estos son los valores máximos de aceleración lineal para la variable articular prismática  $D_3$  ( $0,1406$  m/seg<sup>2</sup> en valor absoluto). Para  $t = 2,5$ seg (punto de inflexión para  $D_3(t)$ ), la velocidad lineal es máxima e igual a  $0,1752$ m/seg y nula la aceleración lineal. Es decir  $\ddot{D}_3(2,5 \text{seg}) = 0m / \text{seg}^2$ .

Las funciones polinómicas obtenidas para cada una de las variables articulares se representan en las figuras 10 a 16. La variable  $\Theta_1$  es constante e igual a  $90^\circ$  en los 5 segundos del movimiento; por lo tanto, la figura 10 muestra solo la evolución temporal de la variable articular  $\Theta_1$  conforme a la ecuación 11. Para la variable  $\Theta_2$ : las figuras 11 a 13 representan las gráficas de la evolución temporal de la posición, velocidad y aceleración articular, conforme a las ecuaciones 12, 13 y 14.

Par la variable  $D_3$ : las figuras 14 a 16 representan las gráficas de la evolución temporal de la posición, velocidad y aceleración articular, conforme a las ecuaciones 15, 16 y 17.

**3<sup>RA</sup> Etapa:** verificación del cumplimiento del criterio de diseño:

de la etapa 2 se verifica el criterio de diseño establecido ( $\Theta_{2\text{MAX}} < \Theta_{2\text{ADM}}$ ); dado que la máxima aceleración articular para la articulación 2 es menor que el valor admisible proporcionado por fabricación  $10,8^\circ / \text{seg}^2 < 12^\circ / \text{seg}^2$ . De esta manera, se adoptan las trayectorias articulares obtenidas para este caso de estudio, las cuales serán muestreadas con una frecuencia a establecer, y así generar referencias articulares al módulo de control dinámico.

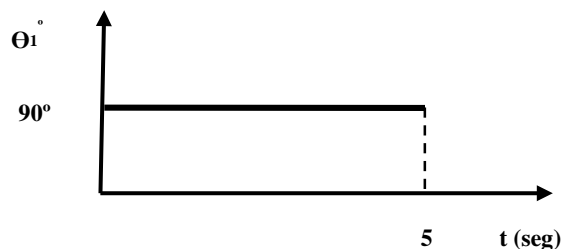


Figura 10: Evolución temporal de la variable articular  $\Theta_1$

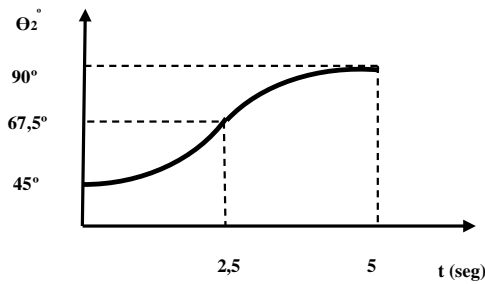


Figura 11: Evolución temporal de la variable articular  $\Theta_2$

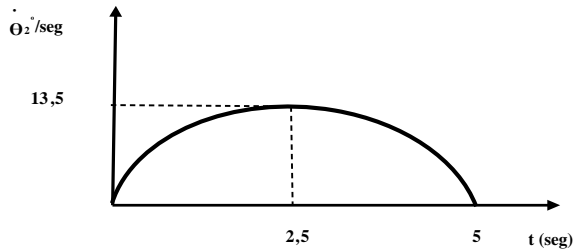


Figura 12: Evolución temporal de la variable articular  $\dot{\Theta}_2$

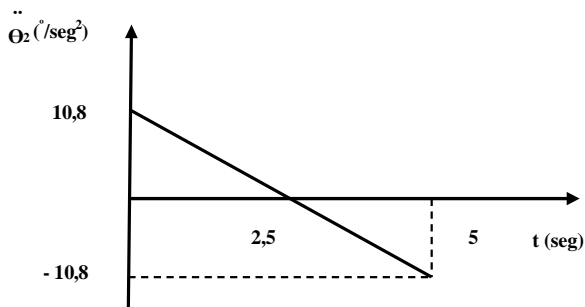


Figura 13: Evolución temporal de la variable articular  $\ddot{\Theta}_2$

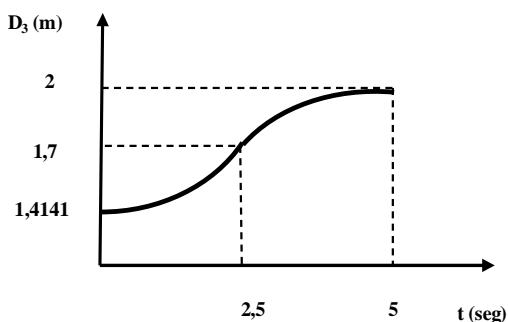


Figura 14: Evolución temporal de la variable articular  $D_3$

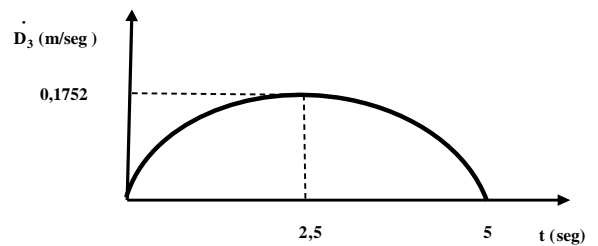


Figura 15: Evolución temporal de la variable articular  $\dot{D}_3$

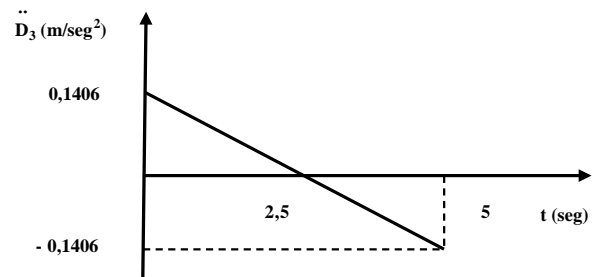


Figura 16: Evolución temporal de la variable articular  $\ddot{D}_3$

### Simulación en Matlab

Tal como se mencionó anteriormente, se implementa el algoritmo computacional de Lagrange en Matlab, haciendo uso del toolbox del programa. La Toolbox de Robótica para Matlab, incluye la función `rne` que permite la resolución del modelo dinámico inverso de un robot mediante un algoritmo computacional.

Para su uso es preciso haber definido previamente el robot, incluyendo parámetros dinámicos.

En el caso del robot, la definición responde al siguiente conjunto de instrucciones:

```
%(c) FUNDAMENTOS DE ROBOTICA (A. Barrientos)
McGrawHill 2007
```

```
l1=10; l2=10;
d1=6; d2=6;
m1=20; m2=10;
clear L
```

```
%Parámetros de Denavit Hartenberg
```

```
L{1} = link([0 l1 0 0], 'standard'); L{2} = link([0 l2 0 0],
'standard');
```

```
%Masas de los eslabones
```

```
L{1}.m = m1; L{2}.m = m2;
```

```
%Coordenadas de los centros de masas de cada eslabón
```

```
L{1}.r = [-l1-d1 0 0]; L{2}.r = [-l2-d2 0 0];
```

```
% Tensores de Inercia (Ixx,Iyy,Izz,Ixy,Iyz,Ixz)
```

```
L{1}.I = [ 0 0 0 0 0 0]; L{2}.I = [ 0 0 0 0 0 0];
```

```

% Inercia del motor que acciona al elemento
L{1}.Jm = 0; L{2}.Jm = 0;

% Coeficiente de reducción del actuador del elemento
L{1}.G = 1; L{2}.G = 1;

% Rozamiento viscoso del actuador del elemento
L{1}.B = 0; L{2}.B = 0;

% Rozamiento de Coulomb en la dirección positiva y negativa del
actuador del elemento
L{1}.Tc = [ 0 0]; L{2}.Tc = [ 0 0];

% Definición del robot.
Scara = robot(L, 'Scara', 'UPM', 'Robot Scara 2 GDL');
Scara.name = 'Scara'; Scara.manuf = 'UPM';

La función rne, proporciona los pares necesarios para una
determinada trayectoria, definida mediante los vectores que
contienen las coordenadas articulares, sus velocidades y
aceleraciones. Por lo tanto, será preciso definir previamente estos.
Complementarias a la función rne la Toolbox de Robotica para
Matlab cuenta con las funciones itorque, Coriolis y gravedad, que
obtienen las aportaciones al par total por inercia, coriolis y
gravedad respectivamente.
En las graficas siguientes se recoge el resultado de este código para
la trayectoria,

q1='sin(t)+pi/2'; q2='sin(5*t)+t+1';

% Número de puntos de la trayectoria
n=100;

% Definición de la trayectoria
%-----
% Definición simbólica de la posición
sq1='sin(t)*t+pi/2'; sq2='sin(5*t)+t+1';

% Definición de Fuerzas en el extremo
%-----
sf3=[0 0 0 0]'; % Sustituir en cada eje en caso se querer aplicar
sn3=[0 0 0]'; % fuerzas o pares externos

% Obtención simbólica de la velocidad y aceleración
sqd1=diff(sq1,sym('t')) ;sqdd1=diff(sqd1,sym('t'));
sqd2=diff(sq2,sym('t')) ;sqdd2=diff(sqd2,sym('t'));

% Parámetros dimensionales
%-----
l1=10; l2=10; d1=6; d2=6; m1=20; m2=10; g=9.8;

% Parámetros iniciales
%-----
% Velocidades y aceleraciones de la base del robot
w0=[0 0 0]'; dw0=[0 0 0]'; v0=[0 0 0]'; dv0=[0 -g 0]'; z0=[0 0
1]';

% Matriz de rotación entre {S2} y TCP ({S3})
%-----
R23=eye(3);

```

```

% Bucle de paso de tiempo
%-----
for tk=1:1:n; t=(tk-1)/10;

% Evaluación numérica de posición, velocidad, aceleración y
trayectoria del TCP
%-----
q1=eval(sq1) ;qd1=eval(sqd1) ;qdd1=eval(sqdd1); q2=eval(sq2)
;qd2=eval(sqd2) ;qdd2=eval(sqdd2);

q(tk,1)=q1;qd(tk,1)=qd1;qdd(tk,1)=qdd1;
q(tk,2)=q2;qd(tk,2)=qd2;qdd(tk,2)=qdd2;
XY(tk,1)=l1*cos(q1)+l2*cos(q1+q2);
XY(tk,2)=l1*sin(q1)+l2*sin(q1+q2);

%Evaluación numérica de las fuerzas y pares en el TCP
%-----
n3=eval(sn3)'; f3=eval(sf3)'; n_3(tk,:)=n3'; f_3(tk,:)=f3';

% PASO 1-2 Evaluación de los vectores p,s y de la matriz de
inercias
%-----
p1=[l1 0 0]'; %vector de {S0} a {S1} en el sistema {S1}
p2=[l2 0 0]'; %vector de {S1} a {S2} en el sistema {S2}
s1=[-(l1-d1) 0 0]'; %Coordenadas del cdg de la barra 1 respecto
{S1}
s2=[-(l2-d2) 0 0]'; %Coordenadas del cdg de la barra 2 respecto
{S2}
I1=zeros(3); %Inercias de barra 1 respecto su cdg en la
base{S1};
I2=zeros(3); %Inercias de barra 2 respecto su cdg en la
base{S2};

% PASO 3 Obtención de las matrices de rotación R01 y R12
%-----
R01=[cos(q1) -sin(q1) 0;sin(q1) cos(q1) 0;0 0 1]; R12=[cos(q2) -
sin(q2) 0;sin(q2) cos(q2) 0;0 0 1];

%PASO 4 Evaluación de las velocidades angulares de {Si}
%-----
w1=R01*(w0+z0*qd1); w2=R12*(w1+z0*qd2);
% PASO 5 Evaluación de las aceleraciones angulares de {Si}
%-----
dw1=R01*(dw0+z0*qdd1)+cross(w0,z0*qd1); dw2=R12*(dw1
+z0*qdd2)+cross(w1,z0*qd2);

% PASO 6 Evaluación de las aceleraciones lineales de {Si}
%-----
dv1=cross(dw1,p1)+cross(w1,cross(w1,p1))+R01'*dv0;
dv2=cross(dw2,p2)+cross(w2,cross(w2,p2))+R12'*dv1;

% PASO 7 Evaluación de la aceleración lineal de los cdg
%-----
a1=cross(dw1,s1)+cross(w1,cross(w1,s1))+dv1;
a2=cross(dw2,s2)+cross(w2,cross(w2,s2))+dv2;

% PASO 8 Evaluación de las fuerzas sobre los eslabones
%-----
f2=R23*f3+m2*a2; f1=R12*f2+m1*a1;

```

```

% PASO 9 Evaluación de los pares sobre los eslabones
%-----
n2=R23*(n3+cross((R23'*p2),f3))+cross((p2+s2),m2*a2)+I2*dw
2+cross(w2,(I2*w2));
n1=R12*(n2+cross((R12'*p1),f2))+cross((p1+s1),m1*a1)+I1*dw
1+cross(w1,(I1*w1));

```

```

% PASO 10 Evaluación de los pares
%-----
P1=n1*R01'*z0;    P2=n2*R12'*z0;    PARES(tk,1)=P1;
PARES(tk,2)=P2;

```

```

% FIN DEL ALGORITMO
%-----

```

```

% VERIFICACIÓN:

```

```

% Este código es únicamente a efectos de verificar que la
programación del algoritmo es correcta. Obtiene % la solución
analítica obtenida manualmente

```

```

T1=(m1*d1^2+m2*(I1^2+d2^2+2*I1*d2*cos(q2))*qdd1+...
+(m2*d2*(I1*cos(q2)+d2))*qdd2+...
-(2*m2*I1*d2*sin(q2))*qd2*qd1+...
-(m2*d2*I1*sin(q2))*qd2*qd2+...
+g*((m1*d1+m2*I1)*cos(q1)+ m2*d2*cos(q1+q2));

```

```

T2= (m2*d2*(I1*cos(q2)+d2))*qdd1+...
+(m2*d2^2)*qdd2+...
+(m2*d2*I1*sin(q2))*qd1*qd1+...
+g*m2*d2*cos(q1+q2);

```

```

PARES2(tk,1)=T1;
PARES2(tk,2)=T2;

```

```

%-----
end % fin del bucle de paso de tiempo

```

```

%-----
% VERIFICACIÓN:
% Este código es únicamente a efectos de verificar que la
programación del algoritmo es correcta
% Obtiene la solución mediante la función rne de la toolbox de
robótica de Matlab

```

```

DefScara;    % Se define el robot
grav=[0,9.8,0]; % Se define la gravedad con respecto al sistema
{S0}
PARES3=rne(Scara,q,qd,qdd,grav,[f_3,n_3]);

```

```

%-----

```

```

% Presentación Gráfica de los resultados

```

```

figure(2)
Tau=rne(Rej5_6,q,qd,qdd,grav);
TauG = gravload(Rej5_6,q,grav);
TauC = coriolis(Rej5_6,q,qd);
TauI = itorque(Rej5_6,q,qdd);

```

```

subplot(2,4,1), hold
plot(Tau(:,1)),plot(T1,'rx'),title('Par Total Q1 L'),grid
legend(strcat('Q1:',sq1),'Location','SouthOutside')
legend boxoff,hold
subplot(2,4,2), plot(TauI(:,1)),title('Par Inercia Q1 L'),grid
subplot(2,4,3), plot(TauC(:,1)),title('Par Coriolis Q1 L'),grid
subplot(2,4,4), plot(TauG(:,1)),title('Par Gravedad Q1 L'),grid

```

```

subplot(2,4,5), hold
plot(Tau(:,2)),plot(F2,'rx'),title('Par Total Q2 L'),grid
legend(strcat('Q2:',sq2),'Location','SouthOutside')
legend boxoff,hold
subplot(2,4,6), plot(TauI(:,2)),title('Par Inercia Q2 L'),grid
subplot(2,4,7), plot(TauC(:,2)),title('Par Coriolis Q2 L'),grid
subplot(2,4,8), plot(TauG(:,2)),title('Par Gravedad Q2 L'),grid

```

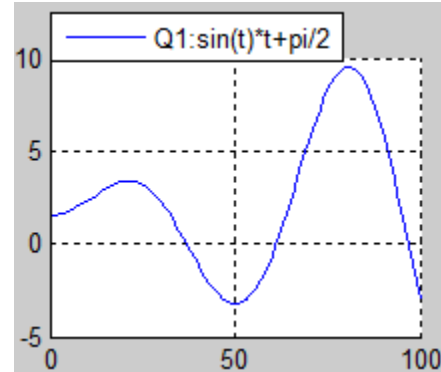


Figura 5. Definición simbólica de la posición Q1.

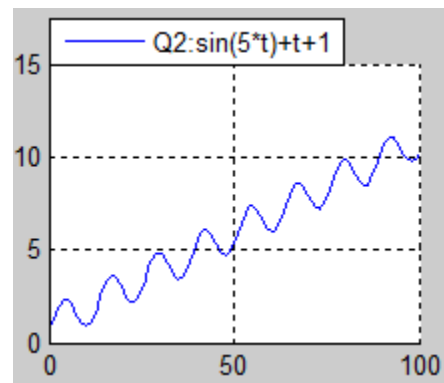


Figura 6. Definición simbólica de la posición Q2.

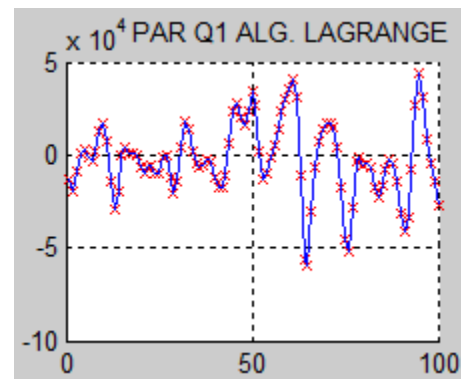


Figura 7. Par Q1 obtenido del algoritmo de Lagrange



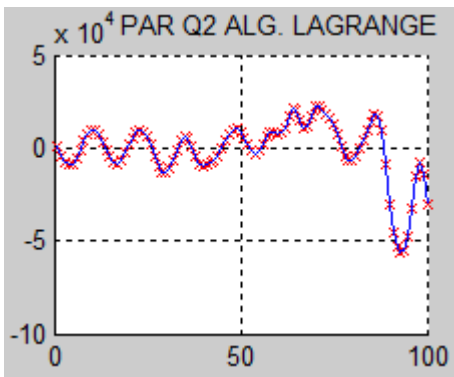


Figura 8. Par Q1 obtenido del algoritmo de Lagrange.

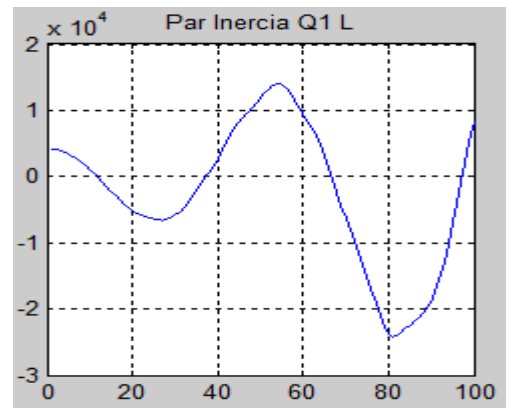


Figura 11. Par Inercia Q1 obtenido por Lagrange

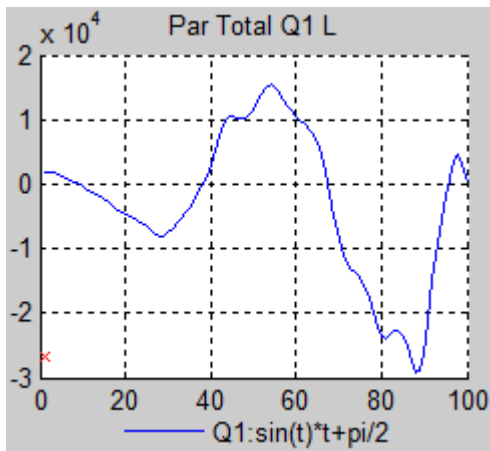


Figura 9. Par Total Q1 obtenido por Lagrange

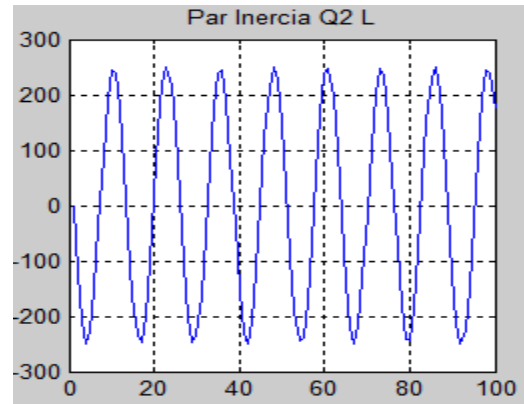


Figura 12. Par Inercia Q2 obtenido por Lagrange

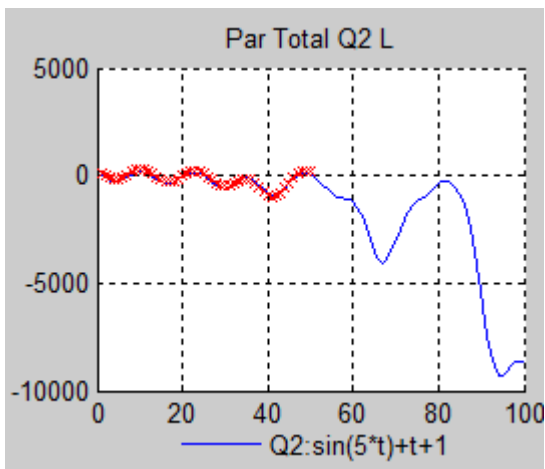


Figura 10. Par Total Q2 obtenido por Lagrange

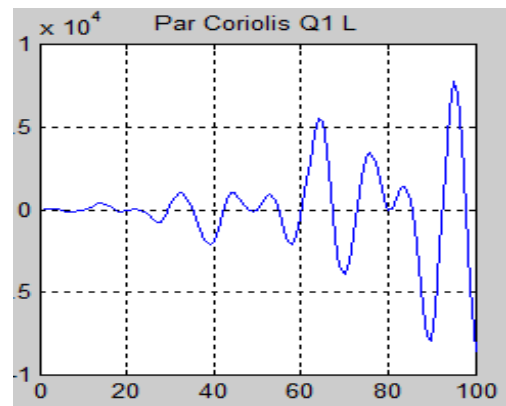


Figura 13. Par Coriolis Q1 obtenido por Lagrange

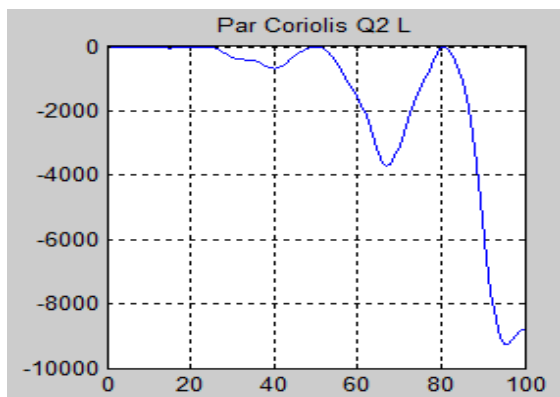


Figura 14. Par Coriolis Q2 obtenido por Lagrange

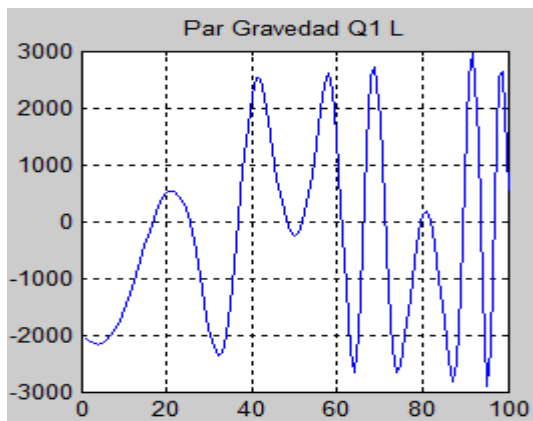


Figura 15. Par Gravedad Q1 obtenido por Lagrange

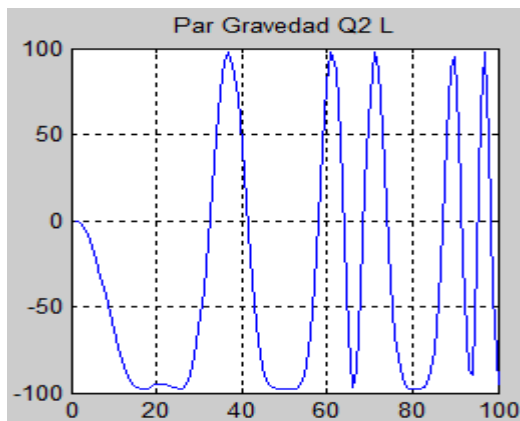


Figura 16. Par Gravedad Q2 obtenido por Lagrange

## 6. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Algunas conclusiones son: 1) el problema analizado se enmarca en el módulo de control cinemático. 2) Se implementa un proceso metodológico de tres etapas; el cual se nutre con la matriz de transformación homogénea y proporciona aquellas trayectorias

articulares que se ajustan a los requisitos de usuario. Se debe complementar, al menos, un criterio de diseño. 3) Se describe un caso de estudio de un robot esférico RRP de tres grados de libertad aplicando este proceso. 4) Se presenta una discusión de estos resultados en base a dos enfoques: la obtención de un lapso mínimo de tiempo para la ejecución de la tarea del robot, teniendo en cuenta una aceleración admisible suministrada por el fabricante; b) el conocimiento de las coordenadas de los puntos de paso del extremo del manipulador en el espacio cartesiano, en base a los valores que toma  $D_3(t)$  en el tiempo y respetando la trayectoria deseada por el usuario. Con respecto al punto a) de la conclusión 4; otra manera de proceder consiste en tomar la expresión general de la velocidad articular para función cúbica 4):  $\dot{q}(t)=3Dt^2+2Ct+B$  y derivarla respecto al tiempo para obtener la aceleración articular  $\ddot{q}(t)=6Dt+2C$  que es la expresión de una recta y cuyo valor máximo se da en  $t=0$ ; es decir,  $\ddot{q}(0)=\ddot{q}_{MAX}=2C$ .

Siendo  $C=\frac{3(90^\circ-90^\circ)}{t_{final}^2}$  y sustituyendo se tiene:

$$\ddot{q}_{MAX}=2C=2\frac{3(90^\circ-90^\circ)}{t_{final}^2}=\frac{6(90^\circ-90^\circ)}{t_{final}^2}$$

Como se debe cumplir que:  $\ddot{q}_{MAX} \leq \ddot{q}_{ADM}$  si se toma la igualdad en la expresión anterior, se está adoptando el valor admisible de aceleración como valor de diseño. De esta forma, haciendo esta sustitución se obtiene el tiempo final mínimo requerido para que el manipulador realice su tarea.

$$\ddot{q}_{ADM} = \frac{6(q_{final} - q_{inicial})}{t_{final}^2} \rightarrow t_{final-min} = \sqrt{\frac{6(q_{final} - q_{inicial})}{\ddot{q}_{ADM}}}$$

Este es el valor mínimo de tiempo a utilizar para la construcción de los coeficientes de la función polinómica interpoladora; teniendo en cuenta las restricciones de diseño especificadas por fabricación, y los requisitos del usuario.

Con respecto al punto b) de la conclusión 4; otra forma de proceder en el marco de los criterios de diseño consiste en conocer las coordenadas de los puntos de paso del extremo del manipulador en el espacio cartesiano de trabajo, en base a los valores que toma  $D_3(t)$  en el tiempo (de acuerdo a Ec. (15)) y respetando la trayectoria deseada por el usuario. Se asume que esta trayectoria deseada en el espacio de trabajo es una línea recta entre el punto inicial y final (recta en el plano  $Z_0 - Y_0$  como lo muestra la recta punteada en la figura 17).

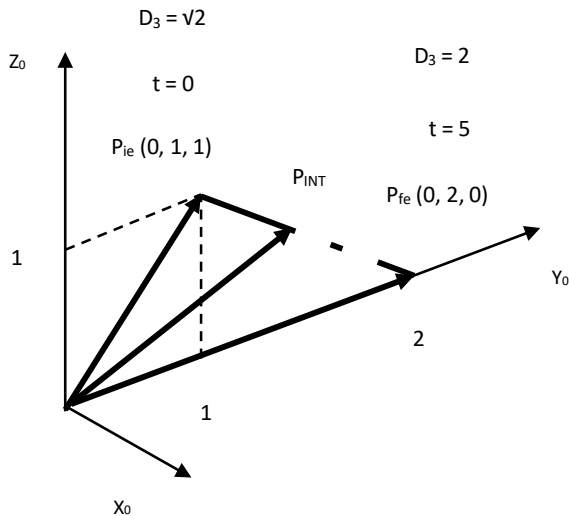


Figura 17: Trayectoria cartesiana del extremo del manipulador que pasa por los puntos  $P_{ie}$ ,  $P_{INT}$  y  $P_{fe}$  donde la longitud del manipulador varía en el tiempo según función polinómica de Ec. (15).

Esta recta pasa por el punto inicial del movimiento:  $Y_0 = 1$ ;  $Z_0 = 0$  ( $t = 0$ ,  $D_3 = \sqrt{2}$ ) y el punto final del mismo:  $Y_0 = 2$ ;  $Z_0 = 0$  ( $t = 5$ ,  $D_3 = 2$ ). La ecuación del extremo del manipulador en el espacio cartesiano está dada por:  $Z_0 = -Y_0 + 2$  para  $1 \leq Y_0 \leq 2$  &  $0 \leq Z_0 \leq 1$ . En la figura 17 se observan las flechas de los vectores que representan la posición del extremo  $D_3$  del manipulador en ambos puntos, y en un punto de paso para un instante intermedio entre 0 y 5 seg. Es interesante observar, que si el usuario desea conocer la ubicación ( $Y_0$ ,  $Z_0$ ) en el espacio de trabajo cuando el extremo alcanza un cierto valor de  $D_3$ , lo que sucede en algún instante intermedio entre 0 y 5 seg (punto  $P_{INT}$  en la figura 17), se plantean dos condiciones de borde; a saber: una que refleje la pertenencia del extremo  $P_{INT}$  a la recta en el espacio de trabajo, y la segunda que vincula las coordenadas del extremo  $Y_0$  y  $Z_0$  con el módulo de la variable articular  $D_3$ .

Con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones<sup>1</sup>:

$$2 = Z_0 + Y_0 \quad \text{Ec. (18)}$$

$$D_3^2 = Z_0^2 + Y_0^2$$

Una propuesta de trabajo probada en ordenador, consiste en resolver en forma general este sistema para esta recta en el espacio de trabajo. Se despeja  $Y_0$  de la primera y se sustituye en la segunda, llegando a la siguiente ecuación cuadrática en

$$Y_0: 2Y_0^2 - 4Y_0 + (4 - D_3^2) = 0, \text{ cuya resolvente es:}$$

$$Y_{01,2} = \frac{4 + \sqrt{8D_3^2 - 16}}{4} \text{ que tiene solución real para:}$$

$(8D_3^2 - 16) \geq 0$ , tomando valores positivos para la resolvente y para  $D_3$ , dado que es una distancia. En caso de que el usuario desee

conocer las coordenadas  $Y_0$  y  $Z_0$  cuando el extremo alcanza el valor  $D_3 = 1,7\text{m}$  (esto ocurre para  $t = 2,5\text{seg}$ ); resolviendo el sistema se obtienen dos valores (1,66 y 0,33. Este último es el válido, dado que se debe cumplir  $0 \leq Z_0 \leq 1$ ). Para  $Z_0 = 0,33\text{m}$  es  $Y_0 = 1,67\text{m}$ . De esta manera, para cada instante  $t$  es posible obtener una terna de valores:

( $t = 0$ ): ( $D_3 = \sqrt{2}$ ,  $Y_0 = 1$ ,  $Z_0 = 1$ ) (punto inicial)

( $t = 2,5$ ): ( $D_3 = 1,7$ ,  $Y_0 = 1,67$ ,  $Z_0 = 0,33$ ) (punto de paso intermedio)

( $t = 5$ ): ( $D_3 = 2$ ,  $Y_0 = 2$ ,  $Z_0 = 0$ ) (punto final)

Se continúa muestreando en ordenador para más instantes, obteniendo ternas ( $D_3$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$ ); usando:

$$D_3(t) = -0,0094t^3 + 0,0703t^2 + 1,4141 \quad \text{Ec. (17)}$$

De esta forma, el usuario puede conocer la longitud del brazo del manipulador para cada instante y, fundamentalmente, en el espacio de trabajo para cada valor de  $Y_0$  y  $Z_0$ ; siempre respetando la trayectoria prefijada de:  $2 = Z_0 + Y_0$ .

Se realizó una simulación resolución del modelo dinámico inverso de un robot mediante un algoritmo computacional. De dicho proceso se puede constatar los efectos centrífugos y de Coriolis, además de los efectos gravitatorios en un robot planar de 2GDL. Por lo que el modelo matemático se corrobora con el algoritmo computacional.

## 7. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Se está trabajando en las siguientes líneas de investigación: I) una propuesta metodológica que hace uso del modelo diferencial (expresado por la matriz jacobiana de las velocidades y su inversa), aplicando el método de segmentos lineales con transición parabólica a las variables cartesianas [10]. II) la simulación de ambas metodologías en un ordenador, para luego implementarla en un prototipo real que ya se dispone en nuestra casa de estudios. III) planteo de distintas condiciones de contorno para mayor cantidad de puntos de paso intermedios; haciendo uso de diferentes heurísticas para la determinación de las velocidades en dichos puntos. IV) Una línea de estudio se basa en obtener la función lineal  $D_3(t)$  que vincula los puntos inicial y final de la trayectoria del extremo  $D_3$ . Si se obtiene esta recta para el caso de estudio, la misma es:

$D_3(t) = 0,1171t + 1,4141$ . Luego, tomando la función de la Ec. (17):

$D_3(t) = -0,0094t^3 + 0,0703t^2 + 1,4141$ , si se realiza la diferencia entre ambas funciones se obtiene otra función cúbica  $D_{dif}$ , cuya expresión es:  $D_{dif}(t) = -0,0094t^3 + 0,0703t^2 + 0,1171t$

Si se deriva esta expresión y se la anula, se obtienen los instantes y los valores extremos correspondientes a esos instantes. Obteniéndose los siguientes valores: para  $t_1 = 1,05\text{seg}$  es  $D_{dif1} = -5\text{cm}$  (la función lineal está por arriba de la cúbica); y para  $t_2 = 3,93\text{seg}$  es  $D_{dif2} = +5\text{cm}$  (la función lineal está por debajo de la cúbica). En la figura 18 se puede observar que para los instantes  $t = 0$ ,  $t = 2,5$  y  $t = 5$ ; los valores son iguales para ambas funciones cúbica y lineal (1,4141, 1,7 y 2 respectivamente). Asimismo, para

punto de intersección entre el extremo de ese  $D_3$  y la recta deseada en el espacio de trabajo ( $2 = Z_0 + Y_0$ ).

<sup>1</sup> Este es un sistema de una recta y una circunferencia de radio  $D_3$  y centro  $Y_0 - Z_0$ . Para cada  $D_3$  hay una circunferencia que pasa por el

los instantes 1,05 y 3,93; se obtienen las máximas diferencias de 5cm (interesa el valor absoluto) entre ambas trayectorias articulares (segmentos en rojo). La cual debe ser cotejada con un valor de tolerancia.

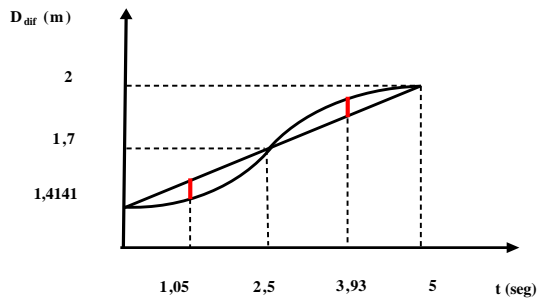


Figura 18: Función diferencia entre las trayectorias articulares cúbica y lineal con las diferencias máximas en rojo

## 8. REFERENCIAS

- [1] Ollero Baturone, A., “Robótica Manipuladores y robots móviles”. Ed. Alfaomega, España, 2007.
- [2] Craig, J. J., “Introduction to Robotics”. Ed. Addison Wesley, Reading, MA, 1989.
- [3] Barrientos, Antonio; Peñín, Luis Felipe; Balaguer Carlos y Aracil Rafael. “Fundamentos de Robótica”. Editorial McGraw – Hill. Madrid – España, 2007.
- [4] Reyes Cortés, F., “Robótica – Control de Robots Manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2011.
- [5] Kelly, R. & Santibáñez, V., “Control de Movimiento de Robots Manipuladores”. Ed. Prentice Hall – México, 2003. [6] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G. “Robotics: Modelling, Planning and Control”. Springer– Verlag, London, Great Britain, 2010.
- [7] Iñigo Madrigal, R. & Vidal Idiarte, E., “Robots industriales manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2004. [8] Spong, M. & Hutchinson, S. “Robot Modeling and Control”. Ed. John Wiley & Sons, 2006.
- [9] Anand, V. B. “Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers”. Ed. John Wiley & Sons, 1993. [10] R. Jazar, “Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics and Controls”, 1st ed. NY, EEUU: Springer, 2007.